

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΒΑΘΙΑΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΤΙ ΚΑΝΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΠΟΥ ΞΕΧΩΡΙΖΟΥΝ

Μαρία Μπεμπένη, Μαρία Καλδρυμίδου, & Ξένια Βαμβακούση
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

mbempeni@cc.uoi.gr, mkaldrim@uoi.gr, xvamvak@cc.uoi.gr

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να διερευνήσει τις συνιστώσες της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών. Πραγματοποιήθηκε μελέτη περίπτωσης δύο μαθητών με εξαιρετική επίδοση και βαθιά εννοιολογική γνώση στα μαθηματικά. Παρουσιάζονται δείκτες της βαθιάς προσέγγισης στους άξονες Στόχοι, Στρατηγικές Μάθησης, Στοιχεία Αυτορρύθμισης και Κίνητρα, οι οποίοι μπορούν να αξιοποιηθούν στο σχεδιασμό εργαλείου μέτρησης για τις προσεγγίσεις στη μάθηση των μαθηματικών.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Εδώ και αρκετά χρόνια είναι γνωστό ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές προσεγγίζουν τη μάθηση ενός αντικειμένου. Μια κεντρική διάκριση είναι αυτή της επιφανειακής έναντι της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση (Entwistle & McCune, 2004). Η επιφανειακή προσέγγιση (surface approach) σχετίζεται με την πρόθεση του υποκειμένου να μπορεί να αναπαραγάγει το περιεχόμενο, όταν του ζητηθεί. Αντίθετα, η βαθιά προσέγγιση (deep approach) στη μάθηση συνδέεται με την πρόθεση του υποκειμένου να κατανοήσει το αντικείμενο της μάθησης.

Ένα βασικό ζητούμενο σε αυτό το χώρο έρευνας είναι ο προσδιορισμός των συνιστωσών της κάθε μιας προσέγγισης, ιδιαίτερα της βαθιάς, και των δεικτών τους (Entwistle & McCune, 2004). Ο κύριος όγκος των ερευνητικών δεδομένων προέρχεται από το χώρο της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, στον οποίο έχουν αναπτυχθεί και εργαλεία για ποσοτικές μελέτες (π.χ. Entwistle, McCune, & Tait, 2013). Η ανάπτυξη των εργαλείων βασίστηκε σε ποιοτικές μελέτες που εξέτασαν κυρίως την κατανόηση κειμένου. Όπως επισημαίνουν και οι Entwistle και McCune (2004), η χρήση των εργαλείων σε άλλες ηλικιακές ομάδες και για άλλα αντικείμενα δεν μπορεί να γίνει άμεσα.

Οι έρευνες που έχουν γίνει με μαθητές της δευτεροβάθμιας αφορούν κυρίως τις φυσικές επιστήμες. Τα αποτελέσματά τους συγκλίνουν στο συμπέρασμα ότι η βαθιά προσέγγιση στη μάθηση σχετίζεται με το επίπεδο κατανόησης του αντικειμένου (Chin & Brown, 2000; Stathopoulou & Vosniadou, 2007). Αντίστοιχα αποτελέσματα είχαμε σε προηγούμενη μελέτη (Bempeni & Vamvakoussi, 2015), στην οποία βρήκαμε ότι οι μαθητές με φτωχή εννοιολογική γνώση στα κλάσματα ακολουθούν επιφανειακή προσέγγιση, ενώ οι μαθητές με προχωρημένη εννοιολογική γνώση ακολουθούν βαθιά προσέγγιση στη μάθηση των μαθηματικών. Στη μελέτη αυτή υιοθετήσαμε

το ερευνητικό εργαλείο των Stathopoulou & Vosniadou (2007), στο οποίο προτάσσονται τρεις άξονες: στόχοι, στρατηγικές μάθησης και επίγνωση για την κατανόηση. Τα αποτελέσματά μας έδειξαν ότι οι μαθητές που ακολουθούν επιφανειακή προσέγγιση έχουν ως στόχο την επίδοση στο σχολείο, υιοθετούν την απομνημόνευση και την επανάληψη ως στρατηγικές μάθησης, και παρουσιάζουν χαμηλή επίγνωση για την κατανόησή τους και για την αποτελεσματικότητα των στρατηγικών μάθησης. Αντίθετα, οι μαθητές που ακολουθούν βαθιά προσέγγιση έχουν ως στόχο την κατανόηση, υιοθετούν ως στρατηγικές μάθησης το συνδυασμό θεωρίας και επίλυσης ασκήσεων και τη συστηματική επένδυση χρόνου και παρουσιάζουν υψηλή επίγνωση της κατανόησης και της αποτελεσματικότητας των στρατηγικών μελέτης τους. Από την ανάλυση των δεδομένων μας, ωστόσο, αναδείχθηκαν χαρακτηριστικά των προσεγγίσεων που δεν ανήκαν στις κατηγορίες που είχαμε προβλέψει, όπως τα κίνητρα (π.χ., η βαθιά προσέγγιση συνδέθηκε με το ενδιαφέρον για τη μαθηματική πρόκληση). Επιπλέον, τα δεδομένα μας για τις στρατηγικές μάθησης όσον αφορά τη βαθιά προσέγγιση ήταν φτωχά, πιθανόν γιατί οι ερωτήσεις μας ήταν πολύ γενικές.

Στην παρούσα εργασία αποπειραθήκαμε να εντοπίσουμε και να περιγράψουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια τα χαρακτηριστικά της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών, μελετώντας παιδιά με εξαιρετική σχολική επίδοση στα μαθηματικά. Αυτό αποτελεί ένα πρώτο βήμα για το σχεδιασμό εργαλείων για τη διερεύνηση προσεγγίσεων στη μάθηση των μαθηματικών σε μεγαλύτερη κλίμακα. Η έρευνα είχε δύο φάσεις. Δεδομένου ότι η σχολική επίδοση δε συμβαδίζει απαραίτητα με την εννοιολογική κατανόηση (Bempeni & Vamvakoussi, 2015; Stathopoulou & Vosniadou, 2007), στην πρώτη φάση εξετάσαμε την εννοιολογική γνώση των συμμετεχόντων στα μαθηματικά, επικεντρώνοντας στους ρητούς αριθμούς. Στη δεύτερη φάση εξετάσαμε την προσέγγιση στη μάθηση. Προσαρμόσαμε κατάλληλα το προηγούμενο εργαλείο μας και το εμπλουτίσαμε, ώστε να συμπεριλάβουμε τους άξονες Κίνητρα και Αυτορρύθμιση, οι οποίοι αποτελούν σημαντικές όψεις της προσέγγισης στη μάθηση (Entwistle et al., 2013).

ΜΕΘΟΔΟΣ

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν δύο μαθητές, μία μαθήτρια της ΣΤ' Δημοτικού (M_1) και ένας μαθητής της Γ' Γυμνασίου (M_2), με εξαιρετική επίδοση στο μάθημα των μαθηματικών που όμως, σύμφωνα με μαρτυρίες των καθηγητών τους, απέκλινε από την τυπική άριστη σχολική επίδοση.

Ερευνητικά Εργαλεία

Για την πρώτη φάση της έρευνας, σχεδιάσαμε ένα δοκίμιο που περιλάμβανε 25 έργα, με στόχο την εννοιολογική γνώση για τους ρητούς, τα οποία

εντάσσονταν στις κατηγορίες των Rittle-Johnson και Schneider (in press): α) αξιολόγηση μη οικείων διαδικασιών, β) αξιολόγηση παραδείγματος σχετικά με την έννοια γ) αξιολόγηση απαντήσεων που έχουν δοθεί από άλλους, δ) αναπαράσταση κλασμάτων και πράξεων με κλάσματα, ε) σύγκριση κλασμάτων χωρίς χαρτί και μολύβι, στ) απλοποίηση διαδικασιών με βάση κάποια αρχή, ζ) διατύπωση ορισμού και η) επεξήγηση διαδικασιών.

Στη δεύτερη φάση της έρευνας χρησιμοποιήθηκαν 29 ερωτήσεις, διατυπωμένες με τη μορφή σεναρίου που περιέγραφε μία κατάσταση για σχολιασμό (π.χ. *Αν έπρεπε να συμβουλευτείς ένα μικρότερο παιδί πώς πρέπει να διαβάζει μαθηματικά, τι θα θεωρούσες πολύ σημαντικό να του πεις; Φέρε ένα παράδειγμα άσκησης που σε δυσκόλεψε. Τι έκανες για να τη λύσεις;*).

Διαδικασία

Τα παιδιά συμμετείχαν σε δύο ημιδομημένες συνεντεύξεις διάρκειας περίπου μιάμισης ώρας η καθεμία. Στην πρώτη αντιμετώπισαν τα έργα του πρώτου δοκιμίου. Στη δεύτερη, τρεις μέρες αργότερα, απάντησαν τα ερωτήματα σχετικά με την προσέγγιση που ακολουθούν στη μάθηση των μαθηματικών. Οι συνεντεύξεις απομαγνητοφωνήθηκαν.

Ανάλυση δεδομένων

Η ανάλυση είχε ως σημείο εκκίνησης τους άξονες α) Στόχοι, β) Στρατηγικές μάθησης/μελέτης, γ) Επίγνωση, δ) Αυτορρύθμιση και ε) Κίνητρα. Οι δείκτες για κάθε άξονα ήταν: α) Κατανόηση - προσωπική κατασκευή νοήματος, β) Τεκμηρίωση, Συνδυασμός θεωρίας και εξάσκησης, Επένδυση χρόνου, Συνδέσεις, γ) Υψηλή, δ) Παρακολούθηση, Ρύθμιση, Έλεγχος της νόησης και των συναισθημάτων και ε) Μαθηματική πρόκληση, αντίστοιχα (Bempeni & Vamvakoussi, 2015; Entwistle et al., 2013). Εξετάσαμε όλα τα αποσπάσματα και τα εντάξαμε σε κάποιο άξονα, όταν αυτό ήταν εφικτό. Επιλέξαμε προτάσεις ως μονάδα ανάλυσης, αλλά σε κάποιες περιπτώσεις, και ολόκληρες παραγράφους, έτσι ώστε να αποκτηθεί μία συνολική αίσθηση του νοήματος. Αναζητήσαμε προτάσεις που περιείχαν λέξεις κλειδιά (π.χ. κατανόω, καταλαβαίνω, νόημα κ.α. για το δείκτη Κατασκευή νοήματος). Τοποθετήσαμε τις προτάσεις στους αρχικούς δείκτες και δημιουργήσαμε καινούργιους όπου χρειαζόταν. Οι άξονες και οι αντίστοιχοι δείκτες παρουσιάζονται στον Πίνακα 1. Σημειώνουμε ότι προέκυψαν νέοι δείκτες για τους άξονες Στόχοι, Στρατηγικές Μελέτης, Αυτορρύθμιση και Κίνητρα. Τα δεδομένα στους άξονες Επίγνωση και Αυτορρύθμιση παρουσίαζαν μεγάλη συνάφεια, επομένως συγχωνεύσαμε τους άξονες Επίγνωση και Αυτορρύθμιση σε έναν άξονα (Στοιχεία Αυτορρύθμισης).

Χαρακτηριστικά βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών	
Άξονες	Δείκτες
Στόχοι	Ακαδημαϊκή επιτυχία Κατανόηση – προσωπική κατασκευή νοήματος
Στρατηγικές μάθησης/μελέτης	Ενεργός συμμετοχή στο σχολικό μάθημα Τεκμηρίωση Συνδυασμός κατανόησης θεωρίας και επίλυσης ασκήσεων Συστηματική επένδυση χρόνου – Επίλυση μη οικείων προβλημάτων Συνδέσεις
Στοιχεία Αυτορρύθμισης	Παρακολούθηση/ έλεγχος της κατανόησης Ρύθμιση της συμπεριφοράς και του πλαισίου στη μελέτη Ρύθμιση των συναισθημάτων στην εξέταση Επίγνωση της κατανόησης και της αποτελεσματικότητας των στρατηγικών Ευελιξία στη χρήση στρατηγικών
Κίνητρα	Ενδιαφέρον για τη μαθηματική πρόκληση

Πίνακας 1: Χαρακτηριστικά βαθιάς προσέγγισης στη μελέτη και τη μάθηση των μαθηματικών

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Θα παρουσιάσουμε αναλυτικά αποτελέσματα από τη δεύτερη φάση της έρευνας. Σημειώνουμε ότι οι δύο μαθητές απάντησαν σωστά σε όλα σχεδόν τα εννοιολογικά έργα της πρώτης φάσης, κάποια από τα οποία ήταν ιδιαίτερα απαιτητικά. Οι απαντήσεις τους ήταν ενδεικτικές της βαθιάς εννοιολογικής τους γνώσης για τους ρητούς, αλλά και του υψηλού επιπέδου της μαθηματικής τους σκέψης.

Στόχοι

Και τα δύο παιδιά δήλωσαν ότι ενδιαφέρονται για τη βαθμολογία, αλλά και για τη γνώμη του εκπαιδευτικού και των συμμαθητών τους. Ωστόσο, τόνισαν τη σημασία της κατανόησης στα μαθηματικά, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην προσωπική κατασκευή νοήματος.

[*Τα μαθηματικά*] δεν είναι να ξέρεις κάτι παπαγαλία, απ'έξω. Το θέμα είναι να προσπαθούμε οι ίδιοι και να καταλαβαίνουμε. Αν δεν τα κατάφερα και [*ο δάσκαλος*] μου έβαζε, πιο υψηλό βαθμό απ'ό,τι νόμιζα, θα προσπαθούσα κι

άλλο. [Τα μαθηματικά] θα μου χρειαστούν στη ζωή μου και πρέπει να τα καταλάβω. Το κάνω για μένα και όχι για το δάσκαλο. [...] Τα κλάσματα δεν έχουν να κάνουν μόνο με τους κανόνες της σύγκρισης. Καταρχάς, θα έπρεπε να καταλάβεις τι είναι κλάσμα. Όταν τα έχεις όλα στο μυαλό σου και ξέρεις, όταν έχεις μπροστά σου ένα κλάσμα και ξέρεις τι συμβολίζει αυτό που βλέπεις, σίγουρα σε βοηθάει στο να λύσεις αυτά που σου ζητούνται και γενικά να τα θεωρήσεις πιο εύκολα και πιο οικεία. (M₁)

[Τα μαθηματικά δεν είναι σαν την ιστορία, όπου] τα μαθαίνεις απέξω και πας και τα γράφεις - πρέπει να βάλεις το μυαλό σου να δουλέψει λογικά. [Προτιμώ να ανακαλύπτω μόνος μου], γιατί τότε δεν τα ξεχνάω ποτέ. [...] [Για να συγκρίνεις κλάσματα] υπάρχουν κι άλλοι τρόποι εκτός από τους κανόνες. Πρέπει να καταλαβαίνεις το κλάσμα ως ποσότητα, να το αναπαριστάς με σχήματα. Στο περίπου το κάνεις, με τη λογική. (M₂)

Στρατηγικές μάθησης

Ενεργός συμμετοχή στο σχολικό μάθημα. Και τα δύο παιδιά ανέφεραν ότι δε τους χρειάζεται να μελετήσουν τη θεωρία στο σπίτι, γιατί τη μαθαίνουν στην τάξη. Φαίνεται ότι συμμετέχουν ενεργά στο μάθημα των μαθηματικών: αναγνωρίζουν τι δεν καταλαβαίνουν, δε διστάζουν να εκφράσουν τις απορίες τους και αξιολογούν τις πληροφορίες που παίρνουν από τον εκπαιδευτικό:

[Ένας καλός μαθητής] όταν έχει μία απορία δε θα ντραπεί να την εκφράσει και θα υποστηρίξει την άποψή του. [...] Πολλές φορές έχω υπάρξει αντίθετη με τη γνώμη της κυρίας μας και γενικά θα της το πω. Για παράδειγμα δεν μπορούσα να καταλάβω γιατί δεν πρέπει να βάζουμε δεκαδικούς σε κλάσματα. Δεν μπορούσα να το αποδεχτώ. Αφού παριστάνει μια διαίρεση, γιατί να μη βάζουμε δεκαδικούς; Δηλαδή, οι δεκαδικοί δε διαίρονται; (M₁).

Πολλές φορές (έχει τύχει να προβληματιστώ με κάτι που είπε ο καθηγητής). Σηκώθηκα πάνω στον πίνακα και του το είπα. Κάναμε επιστημονική κουβέντα. Όταν ήμουν σίγουρος ότι είχα λάθος και ότι είναι σωστό αυτό που λέει, τότε τα παράτησα. Μου έχει τύχει όμως να αποδειχθεί ότι είχα δίκιο. (M₂)

Τεκμηρίωση. Όπως είναι φανερό από τα αμέσως προηγούμενα αποσπάσματα, στο πλαίσιο των μαθηματικών, τα δύο παιδιά δεν είναι διατεθειμένα να αποδεχτούν κάτι, αν δεν είναι επαρκώς τεκμηριωμένο. Σε πολλά διαφορετικά σημεία της συνέντευξης δήλωσαν ότι χρησιμοποιούν τη «λογική τους» για να ελέγξουν τα αποτελέσματά τους, ή τα βήματα στην επίλυση προβλήματος (βλ. και αποσπάσματα στην ενότητα «Στοιχεία Αυτορρύθμισης»). Σημειώνουμε επίσης ότι κατά την επίλυση των έργων για τους ρητούς, και τα δύο παιδιά τεκμηριώναν συστηματικά τις ενέργειές τους. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι και τα δύο χρησιμοποίησαν αντιπαραδείγματα.

Συνδυασμός κατανόησης θεωρίας και επίλυσης ασκήσεων. Τα δύο παιδιά τόνισαν ότι είναι απαραίτητος ο συνδυασμός κατανόησης της θεωρίας και επίλυσης ασκήσεων.

Τα μαθηματικά είναι και θεωρία, χωρίς τη θεωρία δε μπορείς να λύσεις τα προβλήματα. Πάντα κρύβεται κάποια θεωρία από πίσω. Πώς θα λύσεις ένα πρόβλημα με ανάλογα ποσά αν δεν ξέρεις τι είναι ανάλογα ποσά; [Πρέπει κανείς] να λύνει και πολλές ασκήσεις. [...] Το να λέω τους κανόνες απ' έξω δε βοηθάει. Μετά στα προβλήματα, πού θα μου χρησιμεύσουν; Θα πάω να γράψω τον κανόνα; Πώς θα λύσω το πρόβλημα; (M₁)

Και η θεωρία χρειάζεται, και οι ασκήσεις χρειάζονται. Αν δε διαβάσεις θεωρία, μένεις στάσιμος σε ένα επίπεδο. Δε μπορείς να αντιμετωπίσεις όλες τις ασκήσεις. [Πρέπει να προσέχει κανείς] τη θεωρία, γιατί στις λεπτομέρειες κρίνονται τα πράγματα. (M₂)

Συστηματική επένδυση χρόνου – επίλυση μη οικείων προβλημάτων. Και τα δύο παιδιά τόνισαν τη σημασία του να επενδύει κανείς συστηματικά χρόνο στα μαθηματικά και δήλωσαν ότι αναζητούν και επιλύουν προβλήματα που δεν έχουν λύσει στο σχολείο. Γι' αυτά τα παιδιά, η εξάσκηση δεν περιορίζεται στη μελέτη λυμένων ή τη λύση παρόμοιων ασκήσεων.

Εγώ πάντως δε θα καθόμουν ποτέ να λύσω ένα εκατομμύριο παρόμοιες ασκήσεις. Αυτό δε βοηθάει [τον μαθητή]- μετά αν δε δει κάτι παρόμοιο δε θα μπορούσε να το λύσει γιατί τις ασκήσεις αυτές τις λύνει μηχανικά, ξέρει ένα τρόπο και είναι όλες ίδιες, απλά με άλλους αριθμούς. Αν δεν κατανοήσει κάποιος την ύλη και δεν αφήσει το μυαλό του να πάει λίγο παραπέρα, να μη μαθαίνει μηχανικά να λύνει το πρόβλημα με ένα κι μόνο τρόπο, δε θα μπορεί να προχωρήσει παρακάτω, να λύσει άλλα προβλήματα. (M₁)

[Η επίλυση πολλών παρόμοιων ασκήσεων] δε μ' αρέσει. Καταντάει ένα πράγμα σαν ιστορία τα μαθηματικά. Αυτό που μαθαίνουν τα παιδιά πώς να λύνουν μια άσκηση και με το που την βλέπουν ξέρουν πώς να τη λύσουν, αυτό δεν πιστεύω πως είναι μαθηματικά. (M₂)

Συνδέσεις. Και οι δύο μαθητές αναφέρθηκαν στη σύνδεση μεταξύ διαφορετικών ενοτήτων στα μαθηματικά, τη σύνδεση των μαθηματικών με άλλα μαθήματα (Φυσική, Χημεία), και την καθημερινή ζωή.

Ναι, [συνδέονται τα προηγούμενα με τα επόμενα στα μαθηματικά] για παράδειγμα είχαμε κάνει ανάλογα ποσά και μετά ποσοστά τα οποία λύνονταν πάλι με ανάλογα ποσά, με τον ίδιο τρόπο. Και για να ξέρεις καλά ανάλογα ποσά, πρέπει να ξέρεις καλά τα κλάσματα. (M₁)

Την επιμεριστική ιδιότητα την είχαμε μάθει από την ΣΤ' Δημοτικού με αριθμούς, τώρα τη μάθαμε και με μεταβλητές, όπως και όλες τις ιδιότητες. (M₂)

Χαρακτηριστικό είναι ότι αναφέρθηκαν στη σύνδεση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων, καθώς και με την καθημερινή ζωή, ως κατάλληλη διδακτική πρακτική:

Να τα παρουσιάσουμε στα παιδιά ζωντανά, έτσι για να μπορούν να το παρατηρήσουν και μέσα από τη ζωή τους. Δηλαδή όταν λέμε $\frac{1}{4}$ του κιλού γραβιέρα, πόσο είναι; (M₁)

Τα παιδιά σε μικρή ηλικία δεν έχουν καταλάβει το κλάσμα σαν ποσότητα. [Θα βοηθούσα ένα μικρότερο παιδί] με τα σχέδια, τις αναπαραστάσεις. (M₂)

Στοιχεία αυτορρύθμισης

Και τα δύο παιδιά έδειξαν ότι παρακολουθούν, ελέγχουν και ρυθμίζουν τον εαυτό τους, στο επίπεδο της νόησης, των συναισθημάτων, και της συμπεριφοράς σε σχέση με τη μάθηση των μαθηματικών.

[Όταν δυσκολεύομαι με ένα πρόβλημα] προσπαθώ να δω το πρόβλημα από όλες τις μεριές και να φτιάξω στο μυαλό μου ένα πίνακα με τα δεδομένα και τα ζητούμενα. [Ξέρεις ότι τα πηγαίνεις καλά] αν παρακολουθείς τη λύση σου και δεν το κάνεις μηχανικά. Κάνεις και επαλήθευση για να δεις αν όντως το έχεις κάνει σωστά. Επαληθεύω με το μυαλό μου όμως, όχι να κάνω πράξεις. Ναι, το αποτέλεσμα πρέπει να το παρακολουθείς, να είναι λογικό το αποτέλεσμα. (M₁)

[Είμαι σίγουρος ότι έχω καταλάβει την εκφώνηση ενός προβλήματος] όταν ξέρω ακριβώς τι λέει και μπορώ να την πω με δικά μου λόγια, όταν την έχω στο μυαλό μου χωρίς να τη διαβάζω κάθε τρεις και λίγο. [Όταν με δυσκολεύει μια εκφώνηση] την απλοποιώ σε πιο μικρά κομμάτια, προσπαθώ να καταλάβω μήπως εννοεί κάτι που εγώ δεν έχω καταλάβει. Τη σπάω σε μικρά κομμάτια και το πάω σιγά σιγά μήπως εγώ κάνω κάτι λάθος ή δεν καταλαβαίνω κάτι. (M₂)

Ως αποτέλεσμα, τα δύο παιδιά φαίνεται να έχουν επίγνωση της κατανόησής τους και μάλιστα διαχωρίζουν τις δυσκολίες στην κατανόηση από τις απαιτήσεις του σχολικού πλαισίου:

Ε, στην αρχή τα κλάσματα μου φάνηκαν λίγο δύσκολα. Βέβαια, το να κάνεις πράξεις και αυτά που μου ζητούσαν οι ασκήσεις ήταν εύκολα. (M₁)

Αυτό με τις Πιθανότητες που κάναμε τελευταία, δεν τα κατάλαβα καλά γιατί ήταν λίγο αόριστα, κάθισα και τα είδα στο χαρτί. [Έτσι είναι συνήθως με τα μαθηματικά] μετά τα καταλαβαίνεις. Αυτά που έχεις μάθει στο Γυμνάσιο, τα καταλαβαίνεις καλά στο Λύκειο. Αυτό ας πούμε για το «χιαστί» γινόμενο, έχω μάθει και το χρησιμοποιώ. Αν το ψάξεις λίγο το καταλαβαίνεις κιόλας. (M₂)

Χαρακτηριστική είναι η αναφορά τους στον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζουν ένα μη οικείο πρόβλημα στο πλαίσιο της εξέτασης:

Μέχρι και την τελευταία στιγμή προσπαθείς. Αν από την αρχή που είδες την άσκηση πεις τα παράτησα και κατευθείαν πέσεις σε αρνητικές σκέψεις και να



ξέρεις να τη λύσεις, δεν πρόκειται. Αν έχεις χρόνο και μπορείς να προσπαθήσεις μέχρι το τέλος, γιατί να την παρατήσεις από την αρχή; (M₁)

Πρώτα λες, ωχ Παναγία μου, μετά αρχίζεις να βρίζεις τον καθηγητή και στο τέλος λες, δε βαριέσαι, διαγώνισμα τριμήνου είναι, ό,τι κάνω. (M₂)

Και τα δύο παιδιά φάνηκαν να αναγνωρίζουν ότι στην επίλυση προβλήματος απαιτείται ένας συνδυασμός επιμονής στην προσπάθεια και ευελιξίας:

Την είχα αφήσει αυτή την άσκηση. Μετά που το ξανασκέφτηκα το πήρα από άλλη πλευρά για να μπορέσω να βρω αυτό το δεδομένο που μου έλειπε. [Όταν δεν έχει αποτελέσματα η μέθοδός μου] δοκιμάζω κάτι άλλο από αυτά που έχω μάθει, ακόμη κι αν δεν είμαι σίγουρη. (M₁)

Απλά έκανα διάφορες σκέψεις. Κι όταν δε μου έβγαιναν οι σκέψεις, τις απέρριπτα. Σκεφτόμουν διάφορα πράγματα ως προς τη λύση της άσκησης και απέρριπτα όποια δε μου έβγαιναν. (M₂)

Σημειώνουμε ότι η M₁ δήλωσε ότι είναι πάντα συγκεντρωμένη όταν μελετά, ώστε να χρειάζεται λιγότερο χρόνο. Ο M₂ «αποκάλυψε» ότι ξεκίνησε ιδιαίτερα μαθήματα γιατί χρειαζόταν κάποιον να τον κινητοποιεί για να κάνει παραπάνω εξάσκηση. Και τα δύο παιδιά επέδειξαν αυτοπεποίθηση σε σχέση με τις τρέχουσες στρατηγικές μάθησής τους στα μαθηματικά. Ο M₂ ανέφερε ότι στο παρελθόν διαπίστωσε ότι δεν πρόσεχε αρκετά τη θεωρία, προσθέτοντας ότι «μετά το κατάλαβα, αργά δεν πιστεύω ότι ήταν». Επιπλέον, αναφερόμενος στη στρατηγική του να επικεντρώνει περισσότερο στις ασκήσεις, δήλωσε:

Εγώ τα καταλαβαίνω με αυτόν τον τρόπο. Αν δω ότι δεν αποδίδει τα μετέπειτα χρόνια, θα το αλλάξω. (M₂)

Κίνητρα

Και τα δύο παιδιά κινητοποιούνται από τα μη τετριμμένα μαθηματικά προβλήματα.

Με ενδιαφέρουν περισσότερο τα προβλήματα που είναι δύσκολα και χρειάζεται να κάνεις κάτι παραπάνω για να το λύσεις, και όχι σαν τα άλλα που λύνονται με ένα συνηθισμένο τρόπο, μηχανικά. Βαρετές μου φαίνονται αυτές με τα πινακάκια και να κάνουμε όλη την ώρα «χιαστί», που λύνονται με ένα συγκεκριμένο τρόπο και κάνεις μόνο αυτό και είναι σαν να το κάνεις μηχανικά. (M₁)

Γενικά όσα έχω ξανακάνει [μου φαίνονται βαρετά], δηλ. όσα δεν πάνε το μυαλό σου να σκεφτεί παραπέρα. Κάτι που έχει πράξεις και κάνεις τα ίδια και τα ίδια. Γι' αυτό η Γεωμετρία είναι πιο ενδιαφέρον κομμάτι. (M₂)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η ανάλυση των συνεντεύξεων των δύο παιδιών ανάδειξε δείκτες της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών στους άξονες Στόχοι, Στρατηγικές Μάθησης, Στοιχεία Αυτορρύθμισης και Κίνητρα (Bempeni & Vamvakoussi, 2015; Entwistle et al., 2013). Ειδικότερα, τα δύο παιδιά έχουν ως στόχο την ακαδημαϊκή επιτυχία, αλλά αποδίδουν ιδιαίτερη αξία στην προσωπική κατασκευή νοήματος. Επενδύουν χρόνο στη μελέτη των μαθηματικών, την οποία εκλαμβάνουν κυρίως ως επίλυση μη οικείων προβλημάτων. Παρά το γεγονός ότι αναγνωρίζουν την αξία της θεωρίας, δεν αφιερώνουν πολύ χρόνο στη μελέτη της. Αυτή η εκ πρώτης όψεως ασυνέπεια εξηγείται, αν λάβει κανείς υπόψη την ποιότητα της συμμετοχής τους στο σχολικό μάθημα, που αποτελεί κεντρική στρατηγική μάθησης γι' αυτά τα παιδιά. Επιπλέον, φαίνεται ότι τα παιδιά αυτά δεν αντιμετωπίζουν τη μαθηματική γνώση αποσπασματικά, αλλά δημιουργούν συνδέσεις μεταξύ αναπαραστάσεων, μαθηματικών ενοτήτων, διαφορετικών μαθημάτων, καθώς και με παραδείγματα από την καθημερινή ζωή. Ιδιαίτερα σημαντικός για το χώρο των μαθηματικών είναι ο δείκτης Τεκμηρίωση: φαίνεται ότι τα παιδιά αυτά απαιτούν την τεκμηρίωση στο σχολικό πλαίσιο, παράγουν τεκμηριώσεις όταν επιλύουν προβλήματα και χρησιμοποιούν την τεκμηρίωση ως μέσο ελέγχου της μαθηματικής τους δραστηριότητας. Επιπλέον, τα δύο παιδιά παρακολουθούν, ρυθμίζουν και ελέγχουν τη νόηση, τα συναισθήματα και τη συμπεριφορά τους σε σχέση με τα μαθηματικά. Ως αποτέλεσμα, έχουν υψηλή επίγνωση για την κατανόησή τους και τις στρατηγικές μάθησής τους και ευελιξία. Τέλος, κινητοποιούνται από τη μαθηματική πρόκληση.

Τα ευρήματα της παρούσας έρευνας δίνουν μία πιο λεπτομερή εικόνα των χαρακτηριστικών της βαθιάς προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών, και μπορούν να αποτελέσουν τη βάση σχεδιασμού ενός ερευνητικού εργαλείου που θα επιτρέψει τη διερεύνηση της προσέγγισης στη μάθηση των μαθηματικών σε μεγαλύτερη κλίμακα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Bempeni, M. & Vamvakoussi, X. (2015). Individual differences in students' knowing and learning about fractions: Evidence from an in-depth qualitative study. *Frontline Learning Research*, 3, 17-34.
- Chin, C. & Brown, D. (2000). Learning in Science: A comparison of Deep and Surface Approaches. *Journal of Research in Science Teaching*, 37, 109-138.
- Entwistle, N. & McCune V. (2004). The conceptual bases of study strategy inventories. *Educational Psychology Review*, 16, 325-345.



- Entwistle, N., McCune, V., & Tait, H. (2013). *Approaches and Study Skills Inventory for Students (ASSIST)* (3rd edition). Ανακτήθηκε από <https://www.researchgate.net/publication/50390092>
- Rittle-Johnson, & B., Schneider, M. (in press). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition*. Oxford Press.
- Stathopoulou, C., & Vosniadou, S. (2007). Conceptual change in physics and physics-related epistemological beliefs: A relationship under scrutiny. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 145-163). Oxford, UK: Elsevier.