

ΑΤΟΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΣΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΓΙΑ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Μπεμπένη Μαρία*, Πουλοπούλου Σταυρούλα** και Βαμβακούση
Ξένια*

*Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, **Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών
mbempeni@cc.uoi.gr, spoulopo@gmail.com, xenva@cc.uoi.gr,

Σε μια ποσοτική μελέτη, ελέγξαμε την υπόθεση ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο που οι μαθητές συνδυάζουν την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τα κλάσματα που παραμένουν σημαντικές ακόμα και στο Γυμνάσιο. Για το σκοπό αυτό κατασκευάσαμε και αξιολογήσαμε ένα ερωτηματολόγιο που επιδόθηκε σε 138 μαθητές Α' και Γ' Γυμνασίου. Σε συμφωνία με την υπόθεσή μας, πάνω από το μισό συμμετέχοντες ομαδοποιήθηκαν μέσω ανάλυσης συστάδων σε δύο προφίλ: μαθητές των οποίων η εννοιολογική γνώση υπερτερεί σε σχέση με τη διαδικαστική (21,2%) και μαθητές των οποίων η διαδικαστική γνώση υπερτερεί σε σχέση με την εννοιολογική (34%).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ως διαδικαστική γνώση ορίζεται η ικανότητα του ατόμου να εκτελεί μία αλληλουχία πράξεων για να επιλύει προβλήματα ενώ η εννοιολογική γνώση περιλαμβάνει γνώση για τις έννοιες και τις σχετικές αρχές που διέπουν ένα πεδίο (Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001). Οι σύγχρονες θεωρήσεις για τη μάθηση των μαθηματικών συγκλίνουν στην άποψη ότι τόσο η διαδικαστική όσο και η εννοιολογική γνώση είναι εξίσου απαραίτητες (Rittle-Johnson & Schneider, 2014). Ωστόσο η μαθηματική εκπαίδευση αμφιταλαντεύεται, δίνοντας προτεραιότητα πότε στον έναν και πότε στον άλλον τύπο γνώσης (Moss & Case, 1999; Star, 2005). Έτσι, ανακύπτουν ερωτήματα σχετικά με τις βέλτιστες διδακτικές προσεγγίσεις που πρέπει να υιοθετηθούν.

Ένα πρόβλημα στο χώρο έρευνας για τη διαδικαστική και την εννοιολογική γνώση γενικά, και στα μαθηματικά συγκεκριμένα, είναι η σειρά με την οποία αναπτύσσονται τα δύο είδη γνώσης. Πράγματι, υπάρχουν εμπειρικά δεδομένα που υποστηρίζουν δύο εκ διαμέτρου αντίθετες θεωρητικές απόψεις, δηλαδή τόσο ότι η διαδικαστική γνώση προηγείται της εννοιολογικής, όσο και το αντίστροφο (Rittle-Johnson et al., 2001). Ανεξάρτητα από το ποιο είδος προηγείται, η σχέση ανάμεσα στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τη μαθηματική γνώση

είναι συχνά αμφίδρομη. Σύμφωνα με το επαναληπτικό μοντέλο των Rittle–Johnson et al. (2001), τα δύο είδη αναπτύσσονται παράλληλα και συσχετίζονται θετικά με τη βελτίωση του ενός είδους γνώσης να οδηγεί στη βελτίωση του άλλου, το οποίο με τη σειρά του ενισχύει το πρώτο είδος γνώσης. Οι παραπάνω θεωρίες, παρότι διαφορετικές, συμφωνούν στο ότι όλοι οι μαθητές αναπτύσσουν τα δύο είδη γνώσης με τον ίδιο τρόπο. Ωστόσο η σχέση μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης δεν είναι πάντα συμμετρική, με την έννοια ότι η επιρροή της εννοιολογικής γνώσης στη διαδικαστική δεν είναι ίδια με αυτή της διαδικαστικής γνώσης στην εννοιολογική (Rittle-Johnson & Schneider, 2014), τεκμηριώνοντας την ύπαρξη ατομικών διαφορών, δηλαδή τη διαφορετικότητα στον τρόπο που οι μαθητές συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης (Canobi, 2004; Canobi, Reeve, & Patisson, 2003).

Πρόσφατα, οι Hallett και συνεργάτες (Hallett, Nunes, & Bryant, 2010; Hallett, Nunes, Bryant, & Thorpe, 2012) ερεύνησαν τέτοιου είδους ατομικές διαφορές στο χώρο των ρητών αριθμών. Οι Hallett et al. (2010) υπέθεσαν ότι τα παιδιά μπορούν να μάθουν, είτε αναπτύσσοντας πρώτα τις διαδικασίες, είτε τις έννοιες και σε αντίθεση με τους Rittle Johnson et al. (2001) δε θεωρούν ότι το ένα είδος γνώσης οδηγεί απαραίτητα στην ανάπτυξη του άλλου είδους. Από έρευνά τους στην οποία συμμετείχαν μαθητές Δ΄ και Ε΄ Δημοτικού, βρέθηκε ότι υπάρχουν μαθητές που βασίζονται περισσότερο στη διαδικαστική γνώση, μαθητές που βασίζονται περισσότερο στην εννοιολογική και μαθητές που βασίζονται εξίσου στα δύο είδη γνώσης. Επιπλέον εντοπίστηκαν δύο ομάδες μαθητών που δυσκολεύονται στα κλάσματα, δηλαδή, μαθητές χωρίς την προσδοκώμενη διαδικαστική και εννοιολογική γνώση. Οι Hallett et al. (2012) επέκτειναν την έρευνά τους σε παιδιά ΣΤ΄ Δημοτικού και Β΄ Γυμνασίου και επιβεβαίωσαν την ύπαρξη ατομικών διαφορών στη γνώση για τα κλάσματα, οι οποίες, αξίζει να σημειωθεί, ήταν λιγότερο εμφανείς στα παιδιά της Β΄ Γυμνασίου.

Σε προηγούμενη ποιοτική έρευνα (Bempeni & Vamvakoussi, 2015) εξετάστηκε η διαδικαστική και εννοιολογική γνώση επτά μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου στους ρητούς αριθμούς. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο που τα παιδιά συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης για τους ρητούς αριθμούς. Πιο συγκεκριμένα, προέκυψαν τρία προφίλ μαθητών. Οι 3 μαθητές που κατατάχθηκαν στο πρώτο προφίλ πέτυχαν σε σχεδόν όλα τα έργα κάνοντας ευέλικτη χρήση διαδικαστικών και εννοιολογικών στρατηγικών (διαδικαστικό-εννοιολογικό προφίλ). Οι 3 μαθητές που ανήκαν στο διαδικαστικό προφίλ πέτυχαν σε όλα τα έργα που μπορούσαν να λυθούν με διαδικαστικές στρατηγικές, αλλά απέτυχαν σε εκείνα που εξέταζαν

ακόμα και απλή εννοιολογική κατανόηση (διαδικαστικό προφίλ). Η μία μαθήτρια του εννοιολογικού προφίλ πέτυχε στα περισσότερα έργα που εξέταζαν εννοιολογική γνώση, ακόμη και τα πιο απαιτητικά, χρησιμοποιώντας συστηματικά εννοιολογικές στρατηγικές, αλλά απέτυχε σε όλα τα έργα με διαδικαστική στόχευση. Τα ευρήματα αυτά δείχνουν, επιπλέον, ότι είναι δυνατόν να υπάρχουν ακραίες ατομικές διαφορές στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τους ρητούς αριθμούς, παρά το γεγονός ότι οι διαφορές συνήθως αμβλύνονται με την ηλικία (Hallett et al., 2012), και μάλιστα σε μεγαλύτερα παιδιά από αυτά που συμμετείχαν στην έρευνα των Hallett et al. (2012). Τα ευρήματα αυτά έχουν ιδιαίτερο θεωρητικό ενδιαφέρον γιατί αντιτάσσονται στις θεωρίες που υποστηρίζουν ότι από όλα τα παιδιά ακολουθείται μία συγκεκριμένη αναπτυξιακή οδός για την απόκτηση των δύο ειδών γνώσης (βλ. επίσης Canobi et al., 2003) και θέτουν μια πρόκληση για το επαναληπτικό μοντέλο των Rittle-Johnson et al. (2001) που υποστηρίζει ότι η εννοιολογική και διαδικαστική γνώση στα μαθηματικά αναπτύσσονται παράλληλα.

Για την περαιτέρω διερεύνηση αυτού του θέματος, κατασκευάστηκε και αξιολογήθηκε ένα καινούργιο εργαλείο μέτρησης της εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης στα κλάσματα. Χρησιμοποιήθηκε το εργαλείο αυτό σε μαθητές Α΄ & Γ΄ Γυμνασίου για να ελεγχθεί η υπόθεση ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο που οι μαθητές συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης για τα κλάσματα. Επιπλέον, στόχος ήταν να ελεγχθεί αν, παρόμοια με το εύρημα των Hallett et al. (2012), οι ατομικές διαφορές αμβλύνονται στις μεγαλύτερες ηλικίες.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Μέσα συλλογής δεδομένων

Το ερευνητικό εργαλείο περιλάμβανε 39 έργα για τα κλάσματα τα οποία ήταν ομαδοποιημένα σε δύο μέρη: το πρώτο μέρος περιλάμβανε 12 διαδικαστικά έργα με τη μορφή ερωτήσεων ανοικτού τύπου και το δεύτερο 27 εννοιολογικά έργα με τη μορφή ερωτήσεων πολλαπλής επιλογής. Τα διαδικαστικά έργα τέθηκαν με τη μορφή ερωτήσεων ανοικτού τύπου προκειμένου να διασφαλιστεί ότι οι μαθητές είναι σε θέση να εκτελούν τους σχετικούς αλγορίθμους. Αντίθετα, η εννοιολογική γνώση εξετάστηκε με τη μορφή ερωτήσεων πολλαπλής επιλογής με σκοπό να αποφευχθεί η επίλυση των έργων με χαρτί και μολύβι π.χ. ένα έργο σύγκρισης κλασμάτων δεν εξετάζει εννοιολογική γνώση αν τα κλάσματα μετατραπούν σε ομώνυμα προκειμένου να συγκριθούν. Τα διαδικαστικά έργα απαιτούσαν τη γνώση αλγορίθμων που διδάσκονται στο σχολείο (πράξεις με κλάσματα, εφαρμογή του «χιαστί», μετατροπή

σύνθετου κλάσματος σε απλό, κανόνες της σύγκρισης). Η κατασκευή των εννοιολογικών έργων βασίστηκε σε μία εκτεταμένη ανασκόπηση της βιβλιογραφίας και ως βάση αξιοποιήθηκαν έργα τα οποία έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί σε προηγούμενη έρευνα (Bempeni & Vamvakoussi, 2015). Πιο συγκεκριμένα, τα έργα αφορούσαν τη σχηματική αναπαράσταση γνήσιων και καταχρηστικών κλασμάτων σε επιφάνεια, την αναγνώριση του κλάσματος ως λόγου, το ρόλο του κλάσματος ως λόγο σε πραγματικό πρόβλημα, την κατανόηση της επίδρασης του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με κλάσματα ως όρους, την επιλογή της κατάλληλης πράξης σε πραγματικό πρόβλημα, τη σύγκριση και διάταξη κλασμάτων, την αναπαράσταση κλασμάτων στην αριθμογραμμή, την εκτίμηση αποτελέσματος αθροίσματος κλασμάτων και την πυκνή διάταξη των κλασμάτων. Να σημειωθεί ότι, ενώ τα περισσότερα από τα έργα εμπίπτουν στη διδακτέα ύλη, δεν εντοπίστηκαν όμοια ή κάποια παραλλαγή αυτών στο σχολικό εγχειρίδιο.

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν 138 μαθητές, εκ των οποίων 70 μαθητές της Α΄ και 68 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου.

Διαδικασία

Δόθηκε το ίδιο ερωτηματολόγιο σε δύο εκδοχές (Α και Β), με τα έργα σε διαφορετική σειρά ή μορφή έτσι ώστε να αποφευχθούν φαινόμενα αντιγραφής. Οι μαθητές είχαν πενήντα λεπτά στη διάθεσή τους για να απαντήσουν στα έργα για τα κλάσματα.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Οι απαντήσεις των ερωτήσεων και των δύο ομάδων κωδικοποιήθηκαν ως σωστές ή λανθασμένες. Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα στατιστικής επεξεργασίας SPSS και η γλώσσα προγραμματισμού R (R Project for Statistical Computing).

Αξιολόγηση εργαλείου

Προκειμένου να αξιολογηθεί το εργαλείο της έρευνας ως προς την εγκυρότητα και την αξιοπιστία του διενεργήθηκε πιλοτική έρευνα με μικρό αριθμό μαθητών (61 άτομα).

Για τον έλεγχο της εγκυρότητας του ερωτηματολογίου ως προς τους εννοιολογικούς και λειτουργικούς ορισμούς, πραγματοποιήθηκε έλεγχος εγκυρότητας προσώπου καθώς επίσης και έλεγχος εγκυρότητας περιεχομένου. Για την εγκυρότητα προσώπου, ρωτήθηκαν 6 ειδικοί του χώρου (μέλη ΔΕΠ, διδάκτορες και υποψήφιοι διδάκτορες της Διδακτικής των Μαθηματικών) αν το ερωτηματολόγιο αυτό φαίνεται να είναι ένα

καλό εργαλείο μέτρησης της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης των κλασμάτων και αν όλες οι ερωτήσεις είναι διατυπωμένες κατά τρόπο σαφή. Οι ειδικοί έκριναν το ερωτηματολόγιο ως σαφές, ακριβές και πλήρες. Για την εγκυρότητα του περιεχομένου, οι ειδικοί αξιολόγησαν τη σχέση καθεμιάς από τις 39 ερωτήσεις με το σκοπό του ερωτηματολογίου, σε μια κλίμακα από 1 έως 4, όπου 1 = μη σχετικό, 2 = κάπως σχετικό, 3 = αρκετά σχετικό, και 4 = πολύ σχετικό. Για κάθε ερώτηση, υπολογίστηκε ο δείκτης εγκυρότητας περιεχομένου CVI. Οι ειδικοί θεώρησαν όλες τις ερωτήσεις σχετικές με το θέμα, επομένως ο δείκτης βρέθηκε 1, δηλαδή έλαβε τιμή μεγαλύτερη από 0,83 που απαιτείται για να θεωρηθεί αποδεκτή η ερώτηση (Polit, Beck, & Owen, 2007).

Για να διερευνηθεί αν κάθε υποκατηγορία ερωτημάτων (κλίμακα) όντως μετράει την διαδικαστική και εννοιολογική γνώση των μαθητών έγινε έλεγχος εγκυρότητας εννοιολογικής κατασκευής με την μέθοδο ανάλυσης πολλαπλών χαρακτηριστικών. Κατασκευάστηκε πίνακας συσχετίσεων πολλαπλών χαρακτηριστικών ώστε να μελετηθεί τόσο η συγκλίνουσα εγκυρότητα όσο και η διακρίνουσα εγκυρότητα του ερωτηματολογίου.

Όλες οι ερωτήσεις για τη διερεύνηση της διαδικαστικής γνώσης παρουσίασαν υψηλή συγκλίνουσα εγκυρότητα, δηλαδή υψηλή συσχέτιση με την κλίμακα στην οποία ανήκουν. Οι συσχετίσεις έλαβαν τιμές μεγαλύτερες του 0,7 και σε όλες τις περιπτώσεις υπερέβησαν τις αντίστοιχες συσχετίσεις με την κλίμακα στην οποία δεν ανήκουν, γεγονός αυτό αναδεικνύει την ύπαρξη εγκυρότητας διάκρισης του ερωτηματολογίου. Ωστόσο κάποιες ερωτήσεις για τη διερεύνηση της εννοιολογικής γνώσης επέδειξαν χαμηλή συσχέτιση με την κλίμακα στην οποία ανήκουν. Μία πιθανή εξήγηση είναι η διαφορετική δυσκολία αυτών των έργων, που αποδείχτηκαν ιδιαίτερα απαιτητικά για τους μαθητές της πιλοτικής έρευνας. Δεδομένου, ωστόσο, ότι πρόκειται για έργα που μπορούν να διαχωρίσουν τους συμμετέχοντες με πολύ υψηλή εννοιολογική κατανόηση, αποφασίστηκε να μην εξαιρεθούν από το εργαλείο (βλ. επίσης Hallett et al., 2012).

Όσον αφορά τον έλεγχο της αξιοπιστίας του ερωτηματολογίου, αρχικά έγινε έλεγχος αξιοπιστίας εσωτερικής συνάφειας (Ware & Gandek, 1998). Υπολογίστηκαν οι τιμές του συντελεστή άλφα του Cronbach για κάθε κλίμακα, όπως επίσης και η τιμή του συντελεστή άλφα του Cronbach που θα είχε η κλίμακα στην οποία ανήκει αν αφαιρούσαμε την συγκεκριμένη ερώτηση από αυτή την κλίμακα, για κάθε ερώτηση ξεχωριστά. Βρέθηκε ότι οι κλίμακες παρουσιάζουν υψηλό επίπεδο εσωτερικής συνάφειας, με την κλίμακα για την διερεύνηση του βαθμού διαδικαστικής γνώσης να παρουσιάζει τα υψηλότερα επίπεδα εσωτερικής συνάφειας 0,930, ενώ η

κλίμακα σχετικά με το βαθμό εννοιολογικής γνώσης να παρουσιάζει βαθμό εσωτερικής συνάφειας 0,762.

Για τον έλεγχο αξιοπιστίας εξωτερικής συνάφειας χρησιμοποιήθηκε η διαδικασία των επαναληπτικών μετρήσεων με σκοπό την εκτίμηση της αξιοπιστίας ελέγχου-επανελέγχου. Από το σύνολο των 61 ατόμων της πιλοτικής μελέτης, 40 κατέστη δυνατόν να απαντήσουν και πάλι στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου μετά την πάροδο 15 ημερών. Για κάθε ερώτηση υπολογίστηκε ο ενδοταξιακός συντελεστής (intraclass correlation) για να διερευνηθεί η συνέπεια μεταξύ των δυο μετρήσεων και διαπιστώθηκε ότι όλα τα διαδικαστικά έργα και τα περισσότερα από τα εννοιολογικά έργα παρουσιάζουν καλό συντελεστή αξιοπιστίας (>0,50).

Κύρια Ανάλυση

Τα δεδομένα αναλύθηκαν με τη μέθοδο της ανάλυσης συστάδων με μεταβλητές τα κανονικοποιημένα κατάλοιπα των μέσων ποσοστών επιτυχίας (σκορ) στους δύο τύπους έργων, τα οποία προέκυψαν με παλινδρόμηση του ενός σκορ με το άλλο. Ένα θετικό (αντ. αρνητικό) κατάλοιπο π.χ. στο διαδικαστικό σκορ σημαίνει ότι η επίδοση του ατόμου στα αντίστοιχα έργα είναι υψηλότερη (αντ. χαμηλότερη) από την προβλεπόμενη επίδοση στα εννοιολογικά έργα. Επιλέχθηκαν τα τυποποιημένα κατάλοιπα έτσι ώστε το μέτρο του κάθε είδους γνώσης να είναι ανεξάρτητο από το μέτρο του άλλου (βλ. και Hallett et al., 2012).

Χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα προγραμματισμού R (The R package *clValid*) (Brock, Pihur, Datta, & Datta, 2008) για να επιλεγεί ο βέλτιστος αριθμός συστάδων (clusters) στατιστικά χρησιμοποιώντας μία σειρά από μέτρα αξιολόγησης της εγκυρότητας. Προέκυψε ότι καλύτερη στατιστική μέθοδος για την ομαδοποίηση των δεδομένων μας ήταν ο αλγόριθμος k-means με βέλτιστο αριθμό συστάδων τις τέσσερις.

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται το μέσο εννοιολογικό και διαδικαστικό σκορ και τα αντίστοιχα κανονικοποιημένα κατάλοιπα ανά συστάδα.

Η πρώτη συστάδα (“Καλύτεροι στη διαδικαστική”, N=47, 34%) χαρακτηρίζεται από θετικό διαδικαστικό κατάλοιπο και αρνητικό εννοιολογικό κατάλοιπο. Δηλαδή, η συστάδα αυτή αποτελείται από μαθητές των οποίων η διαδικαστική επίδοση ήταν υψηλότερη από την προβλεπόμενη, ενώ η εννοιολογική τους επίδοση ήταν χαμηλότερη από την προβλεπόμενη. Το αντίθετο συμβαίνει στη τέταρτη συστάδα (“Καλύτεροι στην εννοιολογική”, N=29, 21,2%), η οποία χαρακτηρίζεται από αρνητικό διαδικαστικό κατάλοιπο και θετικό εννοιολογικό κατάλοιπο).

Η δεύτερη συστάδα (“Υψηλά και στις δύο”, N=26, 18.8%) χαρακτηρίζεται από θετικό εννοιολογικό και θετικό διαδικαστικό κατάλοιπο, δηλαδή αποτελείται από μαθητές που παρουσίασαν υψηλότερη από την προβλεπόμενη επίδοση και στους δύο τύπους έργων.

	Συστάδα								p-value
	1		2		3		4		
	MT	TA	MT	TA	MT	TA	MT	TA	
Διαδικαστικό κατάλοιπο	0.9	0.5	0.3	0.4	-0.3	0.5	-1.5	0.4	<.0001
Εννοιολογικό κατάλοιπο	-0.9	0.5	1.2	0.8	-0.2	0.4	0.7	0.6	<.0001
Διαδικαστικό σκορ	69.8	17.6	86.9	11.8	36.5	21.8	8.9	11.1	<.0001
Εννοιολογικό σκορ	4.5	8.2	54.8	10.6	26.2	8.1	31.2	8.6	<.0001

Συστάδα 1: Καλύτεροι στη διαδικαστική

Συστάδα 2: Υψηλά και στις δύο

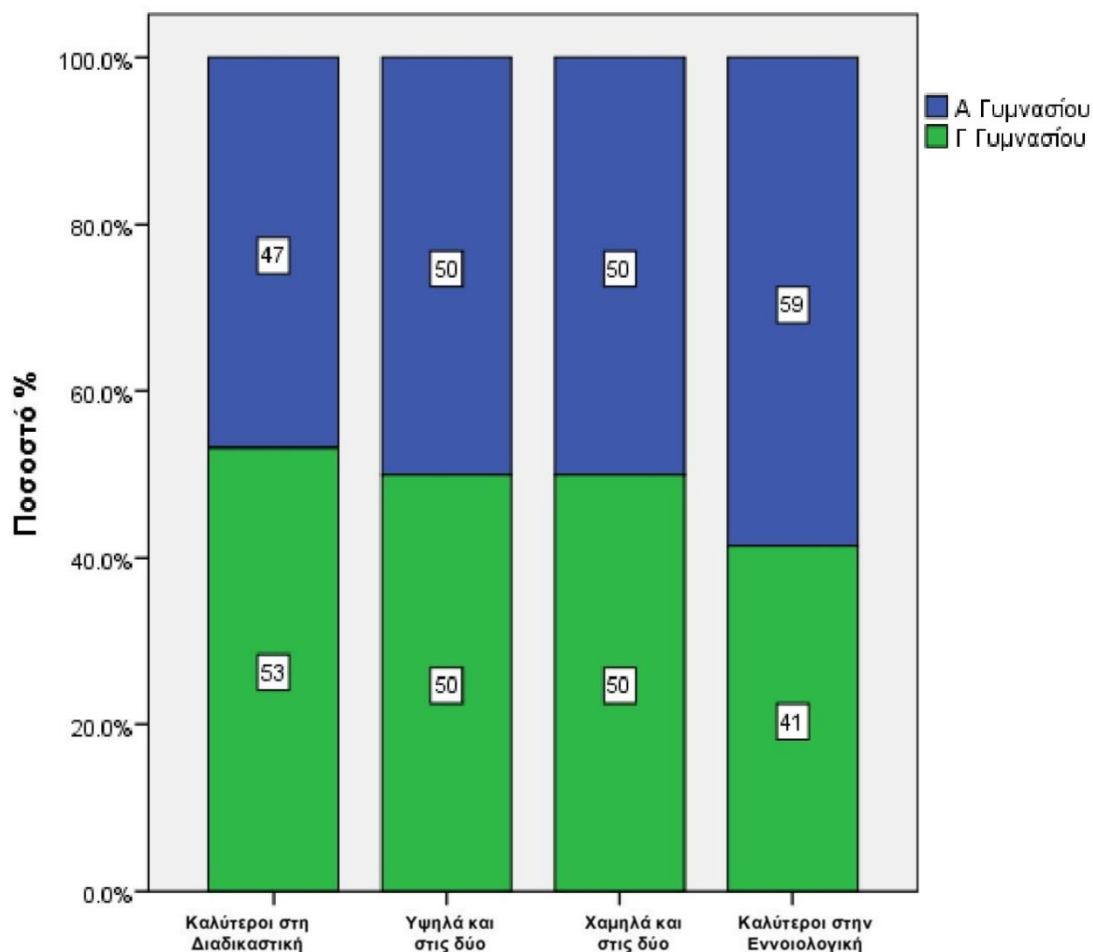
Συστάδα 3: Χαμηλά και στις δύο

Συστάδα 4: Καλύτεροι στη διαδικαστικοί

Πίνακας 1: Μέσο εννοιολογικό και διαδικαστικό σκορ και τα αντίστοιχα κανονικοποιημένα κατάλοιπα, ανά συστάδα

Τέλος, η τρίτη συστάδα (“Χαμηλά και στις δύο”, N=36, 26%) χαρακτηρίζεται από αρνητικό διαδικαστικό κατάλοιπο και αρνητικό εννοιολογικό κατάλοιπο, δηλαδή αποτελείται από μαθητές που είχαν χαμηλότερη από την προβλεπόμενη επίδοση και στους δύο τύπους έργων.

Από το Σχήμα 1 φαίνεται ότι η κατανομή των δύο ηλικιακών ομάδων στις συστάδες είναι παρόμοια. Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώθηκε από το στατιστικό έλεγχο ανεξαρτησίας χ^2 ($\chi^2 = 1.025$, $df=3$, $p=0.795$).



Σχήμα 1: Ποσοστό της κάθε ηλικιακής ομάδας ανά συστάδα

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα της έρευνας επιβεβαιώνουν την υπόθεση ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο που οι μαθητές συνδυάζουν την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τα κλάσματα και ότι οι διαφορές αυτές παραμένουν σημαντικές ακόμη και σε μαθητές Γυμνασίου. Η υπόθεση αυτή υποστηρίζεται περαιτέρω από το γεγονός ότι τα προφίλ μαθητών που προέκυψαν από την παρούσα έρευνα είναι παρόμοια με αυτά των Hallett et al. (2010, 2012) παρά το ότι ένα διαφορετικό εργαλείο χρησιμοποιήθηκε και σε ένα διαφορετικό πληθυσμό (Ελληνες μαθητές), και μάλιστα και σε μεγαλύτερα παιδιά (μαθητές Γ' Γυμνασίου). Αντίθετα με τα ευρήματα των Hallett et al. (2012), τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι ατομικές διαφορές στην εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τα κλάσματα δεν αμβλύνονται απαραίτητα με την ηλικία.

Τα αποτελέσματα έδειξαν επίσης ότι λίγοι μαθητές συνδυάζουν επαρκώς την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση. Δεδομένου λοιπόν ότι η εννοιολογική και διαδικαστική γνώση είναι κρίσιμες για τη μαθηματική ανάπτυξη, είναι σημαντικό να αξιοποιούνται στη διδασκαλία οι διδακτικές στρατηγικές και τεχνικές που υποστηρίζουν και τους δύο τύπους γνώσης, (βλ. Rittle-Johnson & Schneider, 2014, για μία λεπτομερή ανάλυση). Αξίζει να σημειωθεί ότι η ομάδα «Καλύτεροι στη διαδικαστική» είχε τη μεγαλύτερη συμμετοχή στο δείγμα, κάτι που ενδεχομένως αναδεικνύει την ανάγκη για μεγαλύτερη προσοχή στην εννοιολογική γνώση στη διδασκαλία, τουλάχιστον στο ελληνικό πλαίσιο.

Επιπλέον, η τεκμηρίωση τέτοιων ατομικών διαφορών αναδεικνύει τη σημασία της διαφοροποιημένης διδασκαλίας, ανάλογα με τις ανάγκες των μαθητών. Πράγματι, οι μαθητές που ανήκουν σε διαφορετικά προφίλ θα μπορούσαν να επωφεληθούν από διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις που θα αξιοποιούν την εννοιολογική ή διαδικαστική γνώση που διαθέτει το κάθε παιδί (Gilmore & Bryant, 2006).

Τέλος, σημειώνεται ότι το εργαλείο που κατασκευάστηκε παρουσίασε καλούς δείκτες εγκυρότητας και αξιοπιστίας και θα μπορούσε να εξελιχθεί σε σταθμισμένο εργαλείο αξιολόγησης της κατανόησης των μαθητών στα κλάσματα και διάγνωσης των ενδεχόμενων ελλειμμάτων σε εννοιολογική ή/και σε διαδικαστική γνώση, προκειμένου να προσαρμοστεί κατάλληλα η διδασκαλία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Bempeni, M. & Vamvakoussi, X. (2015). Individual differences in students' knowing and learning about fractions: Evidence from an in-depth qualitative study. *Frontline Learning Research*, 3, 17-34.
- Brock, G., Pihur, V., Datta, S., & Datta, S. (2008). clValid: An R package for cluster validation. *Journal of Statistical Software*, 25(4) (p.1-22).
- Canobi, K. H. (2004). Individual differences in children's addition and subtraction knowledge. *Cognitive Development*, 19, 81-93.
- Canobi, K. H., Reeve, R. A., & Pattison, P. E. (2003). *Patterns of knowledge in children's addition*. *Developmental Psychology*, 39, 521-534.
- Cronbach L. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, 6, 297-334.
- Gilmore, C. K., & Bryant, P. (2006). Individual differences in children's understanding of inversion and arithmetical skill. *British Journal of Educational Psychology*, 76, 309-331.

- Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology, 102*, 395–406.
- Hallett, D., Nunes, T., Bryant, P., & Thorpe, C. M. (2012). Individual differences in conceptual and procedural fraction understanding: The role of abilities and school experience. *Journal of Experimental Child Psychology, 113*, 469-486.
- Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum, *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 122-147.
- Polit, D., Beck, C., & Owen, S. (2007). Is the CVI an acceptable indicator of content validity? Appraisal and recommendations. *Res Nurs Health, 30*, 459-467.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*, 346-362.
- Rittle-Johnson, & B., Schneider, M. (2014). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition* (pp.1118-1134). Oxford: Oxford University Press.
- Star, J.R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for research in mathematics education, 36*, 404-411.
- Ware J. & Gandek B. (1998). Methods for testing data quality, scaling assumptions and reliability: The IQOLA project approach. *J Clin Epidemiol., 51*, 945–952.