ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΓΙΑ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΣΤΗΝ Α΄ ΚΑΙ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ: ΤΙ (ΔΕΝ) ΑΛΛΑΖΕΙ;

Μαρία Μπεμπένη, Ξένια Βαμβακούση
Πανεπιστήμιο Αθηνών/Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
mbempeni@gmail.com, xvamvak@cc.uoi.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Με μια εμπειρική μελέτη εξετάσαμε την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τα κλάσματα σε δύο ηλικιακές ομάδες παιδιών, μία από την Α΄ Γυμνασίου και μία από την Γ΄ Γυμνασίου. Παρουσιάζουμε μια πρώτη ανάλυση των αποτελεσμάτων, τα οποία δείχνουν ότι μικρές διαφορές υπάρχουν στις δύο ομάδες, ενώ διαφαίνεται ένα σημαντικό έλλειμμα εννοιολογικής γνώσης και στις δύο ομάδες.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το ζήτημα της διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές της Γνωστικής Ψυχολογίας και της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Ως διαδικαστική γνώση ορίζεται η ικανότητα του ατόμου να εκτελεί μία σειρά από πράξεις για να επιλύει προβλήματα χωρίς απαραίτητα να κατανοεί γιατί δουλεύει η διαδικασία. Η εννοιολογική γνώση αναφέρεται στην ικανότητα του ατόμου να κάνει διασυνδέσεις στη γνώση και να αντιλαμβάνεται τις πολλαπλές αναπαραστάσεις μιας έννοιας (Rittle-Johnson & Siegler, 2001). Πολλές σχετικές έρευνες πραγματεύονται τον τρόπο με τον οποίο το ένα είδος γνώσης επηρεάζει το άλλο κατά την ανάπτυξή του (για μια επισκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας, βλ. Rittle-Johnson & Schneider, in press). Σύμφωνα με κάποιους ερευνητές, τα παιδιά μαθαίνουν πρώτα τις διαδικασίες και μετά εξάγουν τις έννοιες σταδιακά από την εμπειρία τους. Κατά άλλους, τα παιδιά αναπτύσσουν πρώτα βασικές εννοιολογικές αρχές σε ένα πεδίο και μετά τις χρησιμοποιούν για την επίλυση προβλημάτων. Σε μία προσπάθεια να ερμηνευθούν αντικρουόμενα ευρήματα, προτάθηκε το επαναληπτικό μοντέλο, σύμφωνα με το οποίο τα δύο είδη γνώσης αναπτύσσονται παράλληλα, συσχετίζονται θετικά και δεν προηγείται κάποιο από τα δύο (Rittle-Johnson & Siegler, 2001).

Πρόσφατα, η έρευνα εστίασε στις ατομικές διαφορές που υπάρχουν στον τρόπο που τα παιδιά συνδυάζουν τα δύο είδη γνώσης. Ανασκοπώντας τη σχετική βιβλιογραφία οι Rittle-Johnson και Schneider (in press) συμπεραίνουν ότι, ενώ φαίνεται ότι πράγματι τα δύο είδη γνώσης συσχετίζονται θετικά, η εννοιολογική γνώση έχει μεγαλύτερη επιρροή στην ανάπτυξη της διαδικαστικής απ' ό,τι το αντίστροφο. Επιπλέον, ο βαθμός στον οποίο επηρεάζει το ένα είδος το άλλο σχετίζεται και με τις ατομικές διαφορές που μπορούν εν μέρει να αποδοθούν στο διαφορετικό ιστορικό της διδακτικής διαδικασίας που συμμετείχε το υποκειμένο. Δεδομένου, λοιπόν, ότι παραδοσιακά η διδασκαλία εστιάζει στις διαδικασίες, η σχολική εμπειρία είναι πιθανό να προκαλεί κυρίως τη βελτίωση της διαδικαστικής και λιγότερο της εννοιολογικής γνώσης.

Τα κλάσματα είναι μια περιοχή στην οποία οι μαθητές αντιμετωπίζουν πολλές δυσκολίες, κατά κύριο λόγο εννοιολογικής φύσης. Μια μεγάλη ομάδα «εννοιολογικών» λαθών οφείλεται στο φαινόμενο της (ακατάλληλης) μεταφοράς χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων των φυσικών σε μη φυσικούς αριθμούς (για μια εκτενή συζήτηση σχετικά με το φαινόμενο αυτό, βλ. Vamvakoussi, Van Doooren, & Verschaffel, 2012). Τέτοιου είδους λάθη εμφανίζονται σε έργα σύγκρισης (π.χ. «όσο μεγαλύτεροι είναι οι όροι του κλάσματος, τόσο μεγαλύτερο το κλάσμα»), πράξεων (π.χ. «ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει και η διαίρεση πάντα μικραίνει τους αριθμούς») και πυκνής διάταξης (π.χ. «ανάμεσα στο 2/5 και το 3/5 δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί»).

Μεγάλη εννοιολογική δυσκολία φαίνεται να προκαλεί και η κατανόηση του κλάσματος ως λόγου (Clarke & Roche, 2009; Moseley, 2005). Φαίνεται ότι τα παιδιά δεν αντιλαμβάνονται ότι το κλάσμα προσδιορίζεται από τη *σχέση* μεταξύ των όρων του και θεωρούν ότι οι όροι περιγράφουν απόλυτα μεγέθη.

Επιπλέον, πολλοί ερευνητές συνδέουν τις εννοιολογικές δυσκολίες των παιδιών με την αναπαραστατική ευχέρεια σχετικά με τα κλάσματα (π.χ. Moseley, 2005). Ειδικότερα, επισημαίνεται ότι το τυπικό μοντέλο του εμβαδού, με το οποίο το κλάσμα αναπαρίσταται ως μέρος του όλου, περιορίζει την κατανόηση των παιδιών για άλλες πλευρές του, όπως, για παράδειγμα, του κλάσματος ως λόγου. Από την άλλη μεριά, δεν είναι οικείες στα παιδιά άλλες αναπαραστάσεις, όπως αυτή του κλάσματος ως σημείου στην ευθεία, που αναδεικνύουν διαφορετικές όψεις του κλάσματος (π.χ. το κλάσμα σε σχέση με τη μέτρηση, το κλάσμα ως αριθμός) (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001).

Ασφαλώς, οι ερευνητές που ασχολούνται με την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τα κλάσματα, αλλά και τη μάθηση των κλασμάτων γενικότερα, επισημαίνουν το ρόλο της εκπαίδευσης, η οποία τυπικά δίνει έμφαση στη διαδικαστική γνώση και αγνοεί τις δυσκολίες των παιδιών στην έννοια και τις αναπαραστάσεις του κλάσματος (Moss, 1999).

Στην παρούσα έρευνα, λάβαμε υπόψη τις συγκεκριμένες δυσκολίες στα κλάσματα και σχεδιάσαμε μία μελέτη με σκοπό να συγκρίνουμε παιδιά της Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου ως προς τη διαδικαστική και εννοιολογική τους γνώση για τα κλάσματα. Δεδομένου ότι η διδασκαλία των κλασμάτων στην Ελλάδα (μέχρι πρόσφατα και διεθνώς) είναι εστιασμένη στη διαδικαστική γνώση, αναμένουμε επιτυχία και των δύο ηλικιακών ομάδων στα έργα που εξετάζουν τη χρήση διαδικασιών. Για τον ίδιο λόγο, προβλέπουμε έλλειμμα εννοιολογικής γνώσης. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψην προηγούμενες έρευνες που συσχετίζουν τη διδασκαλία που στοχεύει στις διαδικασίες με μικρή βελτίωση της εννοιολογικής κατανόησης, δεν αναμένουμε σημαντικές διαφορές στην εννοιολογική κατανόηση μεταξύ των ηλικιακών ομάδων.

2. ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΕΣ

Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν 30 μαθητές Α΄ και 50 μαθητές Γ΄ Γυμνασίου από πέντε διαφορετικά σχολεία της Αθήνας.

3. ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ

Σχεδιάσαμε ένα ερωτηματολόγιο με 24 έργα, χωρισμένα σε 4 κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία αφορούσε την αναπαράσταση κλασμάτων και συμπεριελάμβανε 6 έργα με στόχο α) την αναπαράσταση του κλάσματος 1/4 σε κύκλο, ο οποίος ήταν χωρισμένος σε 8 ίσα μέρη, β) την αξιολόγηση της αναπαράστασης του κλάσματος 1/3 σε τρίγωνο, το οποίο ήταν χωρισμένο σε τρία άνισα μέρη, γ) την κατασκευή αναπαράστασης για ένα γνήσιο και ένα καταχρηστικό κλάσμα (2/3 και 5/3, αντίστοιχα) και δ) την αναπαράσταση κλασμάτων στην ευθεία των πραγματικών (2 έργα).

Η δεύτερη κατηγορία αφορούσε τη σύγκριση, τη διάταξη, καθώς και την πυκνή διάταξη κλασμάτων. Συμπεριελάμβανε 8 έργα με στόχο α) τη σύγκριση κλασμάτων με ίσους αριθμητές ή παρονομαστές, β) τη διάταξη τριών ρητών, εκ των οποίων ο ένας ήταν καταχρηστικό κλάσμα και ο άλλος σε δεκαδική μορφή (3/2, 1/9, 0.7), γ) την εκτίμηση σχετικά με το ποιο από δύο κλάσματα (3/4 και 6/7) βρίσκεται πιο κοντά στη μονάδα και δ) τη σύγκριση κλασμάτων, στα οποία το ένα κλάσμα του ζεύγους είχε μεγαλύτερο αριθμητή και παρονομαστή από το δεύτερο κλάσμα (3 έργα). Στα τελευταία αυτά έργα υπήρχε ρητή οδηγία να μην εφαρμοστούν πράξεις, ενώ η σύγκριση μπορούσε να γίνει με αριθμό αναφοράς το 1/2, το 1 και με απλή απλοποίηση του ενός κλάσματος αντίστοιχα. Τέλος, στην κατηγορία αυτή υπήρχε 1 έργο, στο οποίο ρωτήθηκε αν και πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο 2/5 και το 3/5.

Η τρίτη κατηγορία αφορούσε τις πράξεις κλασμάτων. Συμπεριελάμβανε 4 έργα στα οποία ζητήθηκε η εκτέλεση των 4 πράξεων με κλάσματα. Σε 4 επιπλέον έργα, ζητήθηκε από τα παιδιά να αποφασίσουν ποια πράξη, πολλαπλασιασμός ή διαίρεση, πρέπει να εφαρμοστεί προκειμένου το αποτέλεσμα να είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από τον πολλαπλασιαστέο ή το διαιρετέο, αντίστοιχα. Τα δύο ήταν συμβατά με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση στους φυσικούς, ενώ τα δύο άλλα δεν ήταν.

Η τέταρτη κατηγορία αφορούσε το κλάσμα ως λόγο και περιελάμβανε 2 έργα. Στο πρώτο παρουσιάστηκε ένα σενάριο σύμφωνα με το οποίο ένα παιδί δήλωνε ότι έφαγε τα 3/4 μιας πίτσας και ένα δεύτερο παιδί συμπέραινε ότι το πρώτο έφαγε 3 κομμάτια πίτσας. Ζητήθηκε από τα παιδιά να πουν αν διαφωνούν ή συμφωνούν με το δεύτερο παιδί. Στο δεύτερο, δόθηκε ένα πρόβλημα στο οποίο δύο παιδιά έφτιαξαν βυσσινάδα, χρησιμοποιώντας διαφορετικές ποσότητες σιροπιού βύσσινο και νερού το καθένα. Το ερώτημα ήταν ποιο παιδί έφτιαξε την πιο γλυκιά βυσσινάδα.

Σε όσα έργα προβλέψαμε ότι η διαδικασία επίλυσης δε θα ήταν προφανής από όσα σημείωνε το παιδί (συνολικά, 11), ζητήσαμε αναλυτική εξήγηση.

4. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Τα παιδιά συμπλήρωσαν τα ερωτηματολόγια σε μία διδακτική ώρα στο πλαίσιο του σχολικού μαθήματος των Μαθηματικών, με την παρουσία του διδάσκοντος.

5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα δεδομένα κωδικοποιήθηκαν ως εξής: Λανθασμένη απάντηση (Λ): 0, Μερικώς σωστή απάντηση (Μ.Σ.): 1 και Σωστή απάντηση (Σ): 2. Στις στατιστικές αναλύσεις χρησιμοποιήθηκαν μη παραμετρικά κριτήρια καθώς, μετά από έλεγχο ανά περίπτωση, διαπιστώθηκε ότι παραβιάζονται οι προϋποθέσεις της κανονικότητας ή/και της ομοιογένειας των διακυμάνσεων των κατανομών.

Επιπλέον, εξετάσαμε τις εξηγήσεις των παιδιών για τον τρόπο που εργάστηκαν και κατηγοριοποιήσαμε τις στρατηγικές τους σε εννοιολογικές και διαδικαστικές. Διαδικαστικές θεωρήσαμε αυτές που κατά την εφαρμογή τους χρησιμοποιούνται κανόνες και διαδικασίες που διδάσκονται στο σχολείο. Ως «εννοιολογικές» ορίσαμε τις στρατηγικές που βασίζονται σε κάποιο νοητικό συλλογισμό του υποκειμένου (ανεξάρτητα από την ορθότητα της απάντησής του στο έργο) [βλ. και Clarke & Roche, 2009].

Η συνολική επίδοση (σε όλα τα έργα του ερωτηματολογίου) της Α΄ Γυμνασίου (*μέση θέση*=35,17) συγκρίθηκε με της Γ΄ (*μέση θέση*=43,70) με το κριτήριο Mann-Whitney και δε βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές, U=590,00, z=-1,59, p=0,111.

Επίσης, όσον αφορά το σύνολο όλων των έγκυρων εξηγήσεων από την Α΄ (N=203) και την Γ΄ (N=384) Γυμνασίου, βρέθηκαν περισσότερες εννοιολογικές στρατηγικές στην Α΄ απ’ ό,τι στην Γ΄ Γυμνασίου [159 (78,3%) και 204 (53,1%), αντίστοιχα]. Επιπλέον, στην Α΄ Γυμνασίου βρέθηκαν λιγότερες διαδικαστικές στρατηγικές σε σχέση με την Γ΄ Γυμνασίου [44 (21,7%) και 180 (46,9%), αντίστοιχα]. Η διαφορά αυτή ελέγχθηκε με το κριτήριο χ^2 και βρέθηκε στατιστικά σημαντική, $\chi^2(1)$= 35,737, p=0,000.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τη συχνότητα και το ποσοστό των απαντήσεων (Σ, Μ.Σ., Λ) για κάθε κατηγορία έργων ξεχωριστά. Για κάθε ένα έργο συγκρίναμε τις επιδόσεις των δύο τάξεων με το κριτήριο Mann-Whitney. Για λόγους οικονομίας χώρου, θα αναφέρουμε μόνο τις διαφορές που βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές.

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα έργα σχετικά με τις αναπαραστάσεις. Από τα στοιχεία του Πίνακα 1 φαίνεται ότι και οι δύο ομάδες είχαν καλή επίδοση στα έργα 1 και 3, τα οποία ενδεχομένως τους είναι πιο οικεία από τη σχολική τους εμπειρία. Μάλιστα, στο έργο 3, η Α΄ Γυμνασίου είχε σημαντικά καλύτερη επίδοση από την Γ΄ Γυμνασίου, U= 630,00, z= -2,295, p=0,022 (*μέση θέση:* 44,50 και 38,10 αντίστοιχα). Είναι ενδιαφέρον, ωστόσο, το εύρημα ότι το 20% της Α΄ Γυμνασίου και το 26% της Γ΄ Γυμνασίου απέτυχε στο Έργο 2, παραβλέποντας το γεγονός ότι για να θεωρηθεί ένα κομμάτι το 1/3 του σχήματος, δεν αρκεί το σχήμα να είναι χωρισμένο σε 3 μέρη- πρέπει τα μέρη αυτά να είναι ίσα. Το έργο 4 προκάλεσε πολλές λανθασμένες απαντήσεις και από τις δύο ομάδες, αλλά κυρίως από την Α΄ Γυμνασίου. Πράγματι, η Γ΄ Γυμνασίου είχε σημαντικά καλύτερη επίδοση από την Α΄ Γυμνασίου, U= 560,00, z= -2,123, p=0,34, (*μέση θέση:* 44,20 και 34,33, αντίστοιχα).

Έργο	Τάξη	Απάντηση			Σύνολο
		Λ	Μ.Σ.	Σ	
1.Το 1/4 σε κύκλο χωρισμένο.	Α΄	0 (0,0%)	0 (0,0%)	30 (100%)	30 (100%)
	Γ΄	2 (4,0%)	0 (0,0%)	48 (96,0%)	50 (100%)
2. Αξιολόγηση αναπαράστασης	Α΄	6 (20,0%)	1 (3,3%)	23 (76,7%)	30 (100%)
	Γ΄	13 (26,0%)	0 (0,0%)	37 (74,0%)	50 (100%)
3. Κατασκευή αναπαράστασης (2/3)	Α΄	0 (0,0%)	0 (0,0%)	30 (100%)	30 (100%)
	Γ΄	8 (16,0%)	0 (0,0%)	42 (84,0%)	50 (100%)
4. Κατασκευή αναπαράστασης (5/3)	Α΄	20 (66,7%)	0 (0,0%)	10 (33,3%)	30 (100%)
	Γ΄	21 (42,0%)	0 (0,0%)	29 (58,0%)	50 (100%)
5.Τα 3/4, 6/7 στην ευθεία	Α΄	21 (70,0%)	1 (3,3%)	8 (26,7%)	30 (100%)
	Γ΄	23 (46,0%)	7 (14,0%)	20 (40,0%)	50 (100%)
6.Τα 1/9, 0,7 και 3/2 στην ευθεία	Α΄	23 (76,7%)	5 (16,7%)	2 (6,7%)	30 (100%)
	Γ΄	17 (34,0%)	10 (20,0%)	23 (46,0%)	50 (100%)

Πίνακας 1: Συχνότητες (ποσοστά%) των απαντήσεων για τα έργα σχετικά με τις αναπαραστάσεις κλασμάτων, ανά τάξη

Μια πρώτη εξέταση των εξηγήσεων δόθηκαν στο έργο 4 δείχνει ότι οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου αποτύγχαναν συστηματικά γιατί προσπαθούσαν να αναπαραστήσουν το κλάσμα με την κατασκευή ενός μόνο και όχι δύο σχημάτων (π.χ. «Πώς είναι δυνατόν να επιλέξω πέντε κομμάτια όταν το σχήμα έχει μόνο τρία;»). Από την άλλη, οι μαθητές της Γ΄, που απάντησαν σωστά, μετέτρεπαν το καταχρηστικό κλάσμα σε μεικτό αριθμό, διαδικαστική στρατηγική που διευκόλυνε τη σχηματική αναπαράσταση του κλάσματος. Τέλος, τα έργα 5, 6 προκάλεσαν τις λιγότερες σωστές απαντήσεις. Η αναπαράσταση κλασμάτων στην ευθεία αποδείχθηκε απαιτητική και για τις δύο ομάδες. Ωστόσο, στο έργο 6, η Γ΄ Γυμνασίου (*μέση θέση:* 47,85) είχε σημαντικά καλύτερη επίδοση από την Α΄ Γυμνασίου (*μέση θέση:* 28,25), U= 382,50, z= -3,990, p=0,000. Μια πρώτη εξέταση των εξηγήσεων που δόθηκαν στο έργο 6 έδειξε ότι τα παιδιά και των δύο τάξεων που απάντησαν σωστά κατά κύριο λόγο μετέτρεπαν όλους τους αριθμούς στη δεκαδική τους μορφή ή σε ομώνυμα κλάσματα, επιδεικνύοντας μεγαλύτερη διαδικαστική ευχέρεια.

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα έργα σχετικά με τη σύγκριση, τη διάταξη, καθώς και την πυκνή διάταξη των κλασμάτων.

Έργο	Τάξη	Απάντηση			Σύνολο
		Λ	Μ.Σ.	Σ	
1.Ομώνυμα	Α΄	3 (10,0%)	0 (0,0%)	27 (90,0%)	30 (100%)
	Γ΄	2 (4,0%)	1 (2,0%)	47 (94,0%)	50 (100%)
2.Ίδιοι αριθμητές	Α΄	3 (10,0%)	0 (0,0%)	27 (90,0%)	30 (100%)
	Γ΄	2 (4,0%)	1 (2,0%)	47 (94,0%)	50 (100%)
3.Σύγκριση με αριθμό αναφοράς το 1	Α΄	1 (3,3%)	8 (26,7%)	21 (70,0%)	30 (100%)
	Γ΄	16 (32,0%)	6 (12,0%)	28 (56,0%)	50 (100%)
4.Σύγκριση με αριθμό αναφοράς το 1/2	Α΄	1 (3,3%)	16 (53,3%)	13 (43,3%)	30 (100%)
	Γ΄	15 (30,0%)	12 (24,0%)	23 (46,0%)	50 (100%)
5. Σύγκριση με απλοποίηση	Α΄	0 (0,0%)	10 (33,3%)	20 (66,7%)	30 (100%)
	Γ΄	9 (18,0%)	8 (16,0%)	33 (66,0%)	50 (100%)
6.Διάταξη των 3/4, 1, 6/7	Α΄	7 (23,3%)	3 (10,0%)	20 (66,7%)	30 (100%)
	Γ΄	12 (24,0%)	4 (8,0%)	34 (68,0%)	50 (100%)
7.Διάταξη των 1/9, 0,7, 3/2	Α΄	4 (13,3%)	11 (36,7%)	15 (50,0%)	30 (100%)
	Γ΄	5 (10,0%)	15 (30,0%)	30 (60,0%)	50 (100%)
8.Πυκνή διάταξη κλασμάτων	Α΄	21 (70,0%)	5 (16,7%)	4 (13,3%)	30 (100%)
	Γ΄	19 (38,0%)	15 (30,0%)	16 (32,0%)	50 (100%)

Πίνακας 2: Συχνότητες (ποσοστά%) των απαντήσεων για τα έργα σύγκρισης, διάταξης, και πυκνής διάταξης, ανά τάξη

Από τα στοιχεία του Πίνακα 2 φαίνεται ότι τόσο η Α΄, όσο και η Γ΄ Γυμνασίου απάντησαν με μεγάλη συχνότητα σωστά στη σύγκριση κλασμάτων, όταν αυτά είχαν ίσους αριθμητές ή παρονομαστές. Η απόδοση, ιδιαίτερα των παιδιών της Γ΄

Γυμνασίου, δεν ήταν το ίδιο καλή στα έργα που απαιτούσαν εννοιολογική στρατηγική σύγκρισης με αριθμό αναφοράς το 1/2 ή το 1. Ωστόσο, περισσότερα παιδιά φαίνεται ότι κατάφεραν να διακρίνουν τη δυνατότητα απλοποίησης του κλάσματος. Επίσης, τα παιδιά και των δύο ομάδων ανταποκρίθηκαν σχετικά καλά στα έργα των διατάξεων, αλλά η πυκνή διάταξη των κλασμάτων δυσκόλεψε σημαντικά την Γ΄ Γυμνασίου, όπου μόνο το ένα τρίτο του δείγματος απάντησε επιτυχώς και ακόμη περισσότερο την Α΄, όπου μόνο το 13% έδωσε σωστή απάντηση. Στο έργο αυτό, η επίδοση της Γ΄ Γυμνασίου (*μέση θέση*: 45,50) ήταν σημαντικά καλύτερη από αυτήν της Α΄ (*μέση θέση*: 32, 17), U=500,00, z=0,007, p=0,007. Μια πρώτη εξέταση των εξηγήσεων που έδωσαν τα παιδιά στο έργο αυτό έδειξε ότι τα παιδιά της Α΄ Γυμνασίου κατέφευγαν κυρίως σε αναλογίες με τους φυσικούς αριθμούς (π.χ. «μετά το 2 έρχεται το 3»), ενώ τα παιδιά της Γ΄ Γυμνασίου μετέτρεπαν τα κλάσματα σε ισοδύναμα, αναφέροντας ότι υπάρχουν «κι άλλοι», ή «πάρα πολλοί» αριθμοί ενδιάμεσα. Μια μικρή μερίδα μαθητών αναφέρθηκε στην απειρία, δίνοντας μια πιο γενική εξήγηση (π.χ. «Υπάρχουν άπειροι αριθμοί γιατί αν τα μετατρέψουμε σε ισοδύναμα κλάσματα με μεγαλύτερους παρανομαστές ή σε δεκαδικούς πάντα θα βρίσκουμε άλλους αριθμούς ανάμεσα»).

Έργο	Τάξη	Απάντηση			Σύνολο
		Λ	Μ.Σ.	Σ	
1.Πρόσθεση	Α΄	4 (13,3%)	0 (0,0%)	26 (86,7%)	30 (100%)
	Γ΄	2 (4,0%)	0 (0,0%)	48 (96,0%)	50 (100%)
2.Αφαίρεση	Α΄	9 (30,0%)	0 (0,0%)	21 (70,0%)	30 (100%)
	Γ΄	8 (16,0%)	0 (0,0%)	42 (84,0%)	50 (100%)
3.Πολ/μός	Α΄	7 (23,3%)	0 (0,0%)	23 (76,7%)	30 (100%)
	Γ΄	8(16,0%)	0 (0,0%)	42 (84,0%)	50 (100%)
4.Διαίρεση	Α΄	14 (46,7)	0 (0,0%)	16 (53,3%)	30 (100%)
	Γ΄	13 (26,0%)	0 (0,0%)	37 (74,0%)	50 (100%)
5.Πολ/μός, συμβατό	Α΄	0 (0,0%)	0 (0,0%)	30 (100%)	30 (100%)
	Γ΄	7 (14,0%)	0 (0,0%)	43 (86,0%)	50 (100%)
6.Διαίρεση, συμβατό	Α΄	0 (0,0%)	0 (0,0%)	30 (100%)	30 (100%)
	Γ΄	5 (10,0%)	0 (0,0%)	45 (90,0%)	50 (100%)
7.Πολ/μός, ασύμβατο	Α΄	17 (56,7%)	0 (0,0%)	13 (43,3%)	30 (100%)
	Γ΄	21 (42,0%)	0 (0,0%)	29 (58,0%)	50 (100%)

8.Διαίρεση, ασύμβατο	Α΄	18 (60%)	0 (0,0%)	12 (40%)	30 (100%)
	Γ΄	25 (50%)	0 (0,0%)	25 (50%)	50 (100%)

Πίνακας 3: Συχνότητες (ποσοστά%) των απαντήσεων για τα έργα σχετικά με τις πράξεις κλασμάτων, ανά τάξη

Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα έργα σχετικά με τις πράξεις.

Από τα στοιχεία του Πίνακα 3 φαίνεται ότι και οι δύο τάξεις είχαν καλή επίδοση στα έργα που αφορούν την εκτέλεση πράξεων, με τη συχνότητα των σωστών απαντήσεων να μειώνεται στην περίπτωση της διαίρεσης κλασμάτων για την Α΄ Γυμνασίου. Και οι δύο τάξεις προσδιόρισαν με μεγάλη ακρίβεια (που έφτασε στο 100% στην Α΄ Γυμνασίου) ποια πράξη έπρεπε να εκτελεστεί για να ισχύει μια δεδομένη ισότητα, όταν αυτό είναι συμβατό με τη «συμπεριφορά» του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης στους φυσικούς αριθμούς. Ωστόσο, η εικόνα αυτή αντιστράφηκε στην αντίθετη περίπτωση, όπου και για τις δύο τάξεις η επικρατούσα απάντηση είναι η λανθασμένη. Φαίνεται ότι και οι δύο τάξεις τα κατάφεραν με τη διαδικαστική πλευρά των πράξεων, αλλά δυσκολεύτηκαν με τη συγκεκριμένη εννοιολογική.

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα έργα σχετικά με το κλάσμα ως λόγο.

Έργο	Τάξη	Απάντηση			Σύνολο
		Λ	Μ.Σ.	Σ	
Έργο 1 (πίτσα)	Α΄	15 (50,0%)	0 (0,0%)	50 (50,0%)	30 (100%)
	Γ΄	23 (46,0%)	0 (0,0%)	27 (54,0%)	50 (100%)
Έργο 2 (βυσσινάδα)	Α΄	9 (30,0%)	1 (3,3%)	20 (66,7%)	30 (100%)
	Γ΄	9 (18,0%)	10 (20,0%)	31 (62,0%)	50 (100%)

Πίνακας 4: Συχνότητες (ποσοστά%) των απαντήσεων για τα έργα σχετικά με το κλάσμα ως λόγο, ανά τάξη.

Από τα στοιχεία του Πίνακα 4 φαίνεται ότι οι δύο ομάδες τα πήγαν σχετικά καλά στο έργο 2, αλλά το έργο 1 προκάλεσε λανθασμένες απαντήσεις από περίπου τα μισά παιδιά σε κάθε ομάδα. Εξετάζοντας τις εξηγήσεις, παρατηρήσαμε ότι, ενώ στο έργο 2 παρουσιάστηκε ένα σχετικά ευρύ φάσμα διαδικαστικών στρατηγικών (π.χ. μετατροπή όλων των λόγων σε δεκαδικούς και σύγκρισή τους, αναγωγή όλων των ποσοτήτων στην ίδια ποσότητα νερού), στο έργο 1 οι λανθασμένες απαντήσεις βασίζονταν στο συλλογισμό «Είναι σωστό, γιατί το 4 δείχνει στα πόσα κομμάτια την έκοψε και το 3 δείχνει πόσα κομμάτια έφαγε».

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Παρουσιάσαμε μια πρώτη ανάλυση των δεδομένων μιας εμπειρικής μελέτης που εξέτασε την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση παιδιών της Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου σχετικά με τα κλάσματα. Ασφαλώς, απαιτείται πιο εκτεταμένη ποσοτική και εις βάθος ποιοτική ανάλυση προκειμένου να εξαχθούν ισχυρά συμπεράσματα, ωστόσο, τα αποτελέσματά μας επιτρέπουν τη διατύπωση ορισμένων αρχικών συμπερασμάτων.

Καταρχήν, κοιτάζοντας την επίδοση των δύο ομάδων στα έργα του ερωτηματολογίου συνολικά, βρήκαμε ότι δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές στην κατανόηση του κλάσματος από την Α΄ μέχρι την Γ΄ Γυμνασίου. Ο ισχυρισμός αυτός είναι, εν μέρει, σωστός: Συγκρίνοντας την επίδοση των δύο ομάδων ανά έργο, βρήκαμε σημαντικές διαφορές στην επίδοση σε μόνο 4 από τα 24 έργα. Φαίνεται ότι η διαδικαστική γνώση για τις πράξεις με κλάσματα, καθώς και για τις συγκρίσεις και διατάξεις έχει σε μεγάλο βαθμό κατακτηθεί ήδη στην Α΄ Γυμνασίου και δε μεταβάλλεται σημαντικά μέχρι την Γ΄ Γυμνασίου. Αυτό ενδεχομένως σημαίνει ότι το έλλειμμα που προκαλείται από τη μη έγκαιρη κατάκτηση της διαδικαστικής γνωσης, συνοδεύει τους μαθητές και μελλοντικά. Βέβαια, ένα τέτοιου είδους ερώτημα απαιτεί μια μακροχρόνια μελέτη για να απαντηθεί.

Όσον αφορά τις πράξεις, είναι μάλλον προφανές ότι η εννοιολογική γνώση, τουλάχιστον αυτή που εξετάσαμε, αποτελεί ένα ζητούμενο και για τις δύο ηλικιακές ομάδες. Συγκεκριμένα, η επίδραση των πράξεων στους αριθμούς δεν προβλέπεται ικανοποιητικά από τα παιδιά, όταν οι πράξεις δε «συμπεριφέρονται» όπως στους φυσικούς (Vamvakoussi et al., 2012).

Σχετικά με τις συγκρίσεις και τις διατάξεις, φαίνεται ότι όταν δεν υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν διαδικαστικές στρατηγικές, παρατηρείται πτώση της επίδοσης και στις δύο ομάδες, η οποία είναι ενδεικτική της δυσκολίας που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην εφαρμογή εννοιολογικών στρατηγικών. Με τα συγκεκριμένα κλάσματα που χρησιμοποιήσαμε (στα οποία οι όροι του ενός ήταν μεγαλύτεροι από τους όρους τους άλλου), ενδεχομένως κάποια παιδιά υπέπεσαν στο λάθος που οφείλεται στην παρανόηση «όσο μεγαλύτεροι οι όροι, τόσο μεγαλύτερο το κλάσμα». Η παρανόηση αυτή αποτελεί ένα παράδειγμα της μεταφοράς χαρακτηριστικών και ιδιοτήτων των φυσικών στους μη φυσικούς αριθμούς (Vamvakoussi et al., 2012). Το φαινόμενο αυτό ήταν πιο έντονο στο έργο της πυκνής διάταξης των κλασμάτων. Ωστόσο, εδώ η Γ΄ Γυμνασίου είχε σημαντικά καλύτερη επίδοση από την Α΄ Γυμνασίου. Από τις εξηγήσεις των παιδιών που απάντησαν σωστά προκύπτει ότι αυτά αξιοποίησαν με μεγαλύτερη ευχέρεια τη διαδικαστική τους γνώση (π.χ. μετατροπή κλασμάτων σε ισοδύναμα), γεγονός που διευκόλυνε την αντιμετώπιση αυτού του εννοιολογικού έργου, όπως θα προέβλεπαν οι Rittle-Johnson και συνεργάτες (2001).

Μια παρόμοια κατάσταση φαίνεται να συμβαίνει στα έργα σχετικά με το κλάσμα ως λόγο: Η διαδικαστική γνώση φαίνεται να βοηθά όσα παιδιά τη χρησιμοποιούν με ευχέρεια να απαντήσουν σωστά στο έργο με τη βυσσινάδα. Ωστόσο, στο έργο με την πίτσα, το οποίο δεν προσφέρεται για τη χρήση διαδικαστικών στρατηγικών, τα μισά παιδιά από κάθε ομάδα απαντούν λανθασμένα (συμπεριλαμβανομένων και του 16,7% και του 8% των παιδιών από την Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου, αντίστοιχα, που είχαν απαντήσει σωστά στο προηγούμενο). Φαίνεται ότι η κατανόηση του κλάσματος ως λόγου αποτελεί επίσης ένα ζητούμενο και για τις δύο ηλικιακές ομάδες.

Το έλλειμμα σε εννοιολογική γνώση και των δύο ομάδων γίνεται πιο φανερό στα έργα με τις αναπαραστάσεις. Και οι δύο ομάδες τα πήγαν καλά μόνο σε οικεία έργα – παρόλ'αυτά, περίπου το ένα τέταρτο των παιδιών της κάθε ομάδες έδωσαν λανθασμένη απάντηση στην αξιολόγηση μιας οικείας αναπαράστασης (το τρίγωνο, χωρισμένο σε 3 άνισα μέρη). Επιπλέον, η αναπαράσταση της ευθείας προκάλεσε πολλά λάθη, με την Γ΄ Γυμνασίου να τα καταφέρνει καλύτερα, αξιοποιώντας διαδικαστικές στρατηγικές. Η αναπαραστατική ευχέρεια των παιδιών φαίνεται εξαιρετικά περιορισμένη. Τέλος, από τα αποτελέσματά μας διαφαίνεται ότι τα παιδιά της Α΄ Γυμνασίου τείνουν να καταφεύγουν περισσότερο σε εννοιολογικές και λιγότερο σε διαδικαστικές στρατηγικές, σε σχέση με τα παιδιά της Γ΄ Γυμνασίου. Θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι αυτό οφείλεται στη μεγαλύτερη διαδικαστική ευχέρεια που διαθέτουν τα μεγαλύτερα παιδιά. Ωστόσο, μία πιθανή εξήγηση είναι ότι η διδασκαλία δίνει σαφώς μεγαλύτερη έμφαση στη διαδικαστική γνώση, παραβλέποντας την εννοιολογική (Moss, 1999) – και φαίνεται ότι αυτή η μεγαλύτερη ευχέρεια συχνά «καμουφλάρει» το έλλειμμα στην εννοιολογική γνώση, που όμως, συνεχίζει να υφίσταται.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clarke, D. M., & Roche A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics, 72* (1) (June 12): 127-138.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Moseley, B. (2005). Students' early mathematical representation knowledge: The effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 60,* 37-69.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum, *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 122-147.

Rittle-Johnson, & B., Schneider, M. (in press). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Kadosh & A. Dowker (Eds), *Oxford Handbook of Numerical Cognition*. Oxford Press.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, *93*, 346-362.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *Journal of Mathematical Behavior*, *31*, 344-355.