ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Ντάντου Γλυκερία, Βαμβακούση Ξένια, Καλδρυμίδου Μαρία

Π.Τ.Ν., Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

glykeria_nt@hotmail.com, xvamvak@cc.uoi.gr, mkaldrim@uoi.gr

Η εργασία αυτή αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης ερευνητικής εργασίας που αφορά τη διερεύνηση των ικανοτήτων των μαθητών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης κατά την ενασχόλησή τους με κανονικότητες και με έργα συμμεταβολής ποσοτήτων, πριν από οποιαδήποτε οργανωμένη διδακτική παρέμβαση. Ειδικότερα, η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στις στρατηγικές των μαθητών στα έργα που απαιτούσαν σύνδεση όρου και θέσης σε επαναλαμβανόμενες κανονικότητες (μακρινή γενίκευση) και στα έργα σχέσεων συμμεταβολής. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές συναντούν δυσκολία σε σχετικά ζητήματα, αλλά παρόλα αυτά αναπτύσσουν αξιοσημείωτες στρατηγικές.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η συναρτησιακή σκέψη θεωρείται ως συνιστώσα της αλγεβρικής (Blanton & Kaput, 2004, 2011). Πράγματι, θεμελιώδη στοιχεία της αλγεβρικής σκέψης θεωρούνται η δυνατότητα γενίκευσης, η δυνατότητα εντοπισμού και έκφρασης σχέσεων, και η σταδιακή τυποποίηση των παραπάνω μέσω γλωσσικών ή μαθηματικών αναπαραστατικών εργαλείων. Από την άλλη μεριά, θεμελιώδη στοιχεία της συναρτησιακής σκέψης θεωρούνται ο εντοπισμός και η έκφραση σχέσεων μεταξύ δύο (τουλάχιστον) μεταβαλλόμενων ποσοτήτων, καθώς και η γενίκευσηκαι τυποποίησή τους.

Στην εργασία αυτή εξετάζουμε πώς ανταποκρίνονται μαθητές της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης (5-12) ετών σε έργα που απαιτούν τον εντοπισμό και αξιοποίηση της σχέσης μεταξύ δύο ποσοτήτων (συναρτησιακή σκέψη), χωρίς προηγούμενη διδασκαλία. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζουμε πώς ανταποκρίνονται οι μαθητές σε έργα «μακρινής γενίκευσης»(εύρεση ενός όρου επαναλαμβανόμενης κανονικότητας που βρίσκεται μακριά από τους δεδομένους) και σε έργα «κοντινής γενίκευσης» στο πλαίσιο μιας κατάστασης στην οποία δύο μεταβαλλόμενες ποσότητες συνδέονται με μια γραμμική σχέση, με ή χωρίς αρχική τιμή.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Σε καταστάσεις στις οποίες συμμεταβάλλονται ποσότητες, έχουν ταυτοποιηθεί δύο είδη προσεγγίσεων των μαθητών,ανάλογα με το αν εντοπίζουν και αξιοποιούν τη σχέση μεταξύ των ποσοτήτων (Blanton&Kaput,2011;Martinez & Brizuela,2006). Στην πρώτη (*βαθμωτή*), εξετάζεται η μεταβολή στους όρους μιας ακολουθίας τιμών μιας εκ των δύο ποσοτήτων (και, άρα, δε λαμβάνονται υπόψη οι δυο ποσότητες ταυτόχρονα). Η προσέγγιση αυτή είναι γνωστή και ως *αναδρομική*, γιατί η εύρεση ενός όρου (κοντινού ή μακρινού) απαιτεί την εύρεση όλων των προηγούμενών του.Στη δεύτερη (*συναρτησιακή*), οι μεταβολές στις δύο ποσότητες εξετάζονται ταυτόχρονα (όπως, για παράδειγμα, αντανακλάται στην περιγραφή «όταν το χαυξάνεται κατά 1, το γαυξάνεται κατά 2»).

Γενικά, συναρτησιακή αντίληψη ανάμεσα στις δύο μεταβλητές έχει η μειοψηφία των μαθητών (βλ. Kaldrimidou&Moroglou, 2009).Το φαινόμενο αυτό είναι πιο έντονο στους μαθητές των μικρότερων ηλικιών(Stephensetal., 2012; Warren, 2005), όπου η βαθμωτήπροσέγγιση είναι κυρίαρχη, σε έργα χειρισμού διαφορετικών αναπαραστάσεων των συναρτησιακών σχέσεων και κυρίως του πίνακα τιμών.Οι μαθητές που ακολουθούν βαθμωτή προσέγγιση εντοπίζουν σχέσεις (συνήθως, προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές) μεταξύ των διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας τιμών της μίας μόνο από τις δύο ποσότητεςκαι συμπληρώνουν τον πίνακα ανά στήλη, ξέχωρα τη μία από την άλλη.Για να θεωρηθεί ότι οι μαθητέςακολουθούν συναρτησιακή προσέγγισηπρέπει αυτοί να εστιάζουν στη σχέση μεταξύ των αντίστοιχων όρων των δύο ποσοτήτων και να συμπληρώνουν τον πίνακα ανά γραμμή

Αυτή η διάκριση (βαθμωτή/αναδρομική ή συναρτησιακή προσέγγιση) είναι χρήσιμη και στην περίπτωση της εύρεσης μακρινού όρου σε έργα επαναλαμβανόμενων κανονικοτήτων.Για παράδειγμα, ακόμα και παιδιά της πρωτοσχολικής ηλικίας, εφόσον εντοπίσουν τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται οι όροι μιας κανονικότητας της μορφής ΑΒΑΒ, μπορούν να την επεκτείνουν όσο χρειάζεται για να βρουν έναν κοντινό όρο (π.χ., τον10^{ο}), η ακόμα, δεδομένου ενός μακρινού όρου, να βρουν τον επόμενό του. Από την άλλη μεριά, η εύρεση ενός μακρινού όρου (π.χ., του 1000^{ου}) ή η διατύπωση του κανόνα για τον οποιονδήποτε (το ν-οστό) όρο, απαιτεί τη σύνδεση του όρου με τη θέση του (π.χ., «Α στις μονές θέσεις, Β στις ζυγές»). Υπό αυτή την έννοια, η μακρινή γενίκευση απαιτεί συναρτησιακή προσέγγισηκαι συνδέεται άμεσα με την ανάπτυξη της συναρτησιακής σκέψης (Κυλάφης, 2009). Πλήθος ερευνών δείχνουν ότι οι μαθητές της πρωτοσχολικής ηλικίας αναπτύσσουν σημαντικές ικανότητες σχετικά με τις επαναλαμβανόμενες κανονικότητες, ακόμα και χωρίς συστηματική διδασκαλία (Fox, 2005; Τζεκάκη& Κούλελη, 2007). Ωστόσο, η μακρινή γενίκευση, που απαιτεί τον εντοπισμό συναρτησιακής σχέσης, είναι απαιτητική και για τα μεγαλύτερα παιδιά (Blanton&Kaput, 2004).

Φαίνεται ότι τα παιδιά της πρωτοβάθμιας ακολουθούν κυρίως τη βαθμωτή προσέγγιση στις μακρινές γενικεύσεις, παρά το γεγονός ότι αυτή είναι επίπονη ή μη αποτελεσματική (Mulliganetal., 2008; Papic&Mulligan, 2007; Stephensetal., 2012). Παράλληλα, υπάρχουν και παιδιά που δυσκολεύονται ναγενικεύσουν, καθώςδεν αναγνωρίζουν ή παρερμηνεύουν τις σχέσεις, ή που ακολουθούν επιφανειακές στρατηγικές (π.χ. «μαντεψιά», εστίαση στους αριθμούς που ενδεχομένως υπάρχουν στην κατάσταση και εκτέλεση πράξεων) (Lannin, 2005; Mulliganetal., 2008).

Ωστόσο, υπάρχει πλήθος ερευνητικών δεδομένων που δείχνουν ότι, με κατάλληλη διδακτική υποστήριξη τα παιδιά της πρωτοβάθμιας, ακόμα και της πρωτοσχολικής, μπορούν να εντοπίσουν, και να εκφράσουν και να αιτιολογήσουν, ακόμα και συμβολικά, τόσο βαθμωτές, όσο και συναρτησιακές σχέσεις (Stephensetal., 2012; Blanton&Kaput, 2004; Panorkou&Maloney, 2016).

Στην παρούσα μελέτη διερευνούμε κατά πόσο παιδιά διαφορετικών ηλικιών, τα οποία δεν έχουν εκτεθεί σε σχετική συστηματική διδασκαλία, μπορούν να ανταποκριθούν σε έργα που άπτονται της συναρτησιακής σκέψης και με ποια προσέγγιση (βαθμωτή, συναρτησιακή, ή επιφανειακή) . Επισημαίνουμε ότι, παρά το γεγονός ότι στο τρέχον αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών προβλέπεται η διδασκαλία κανονικοτήτων, ωστόσο αυτές εντάσσονται στον άξονα περιεχομένου «Μετρήσεις» και δε συνδέονται με την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης, η οποία απαιτεί στοχευμένη διδακτική διαχείριση (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2015).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το δείγμα της διερευνητικής αυτής μελέτης περίπτωσης αποτέλεσαν 13 μαθητές της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης πέντε διαφορετικών σχολείων του Ν. Καρδίτσας, οι οποίοι χωρίστηκαν σε δύο ομάδες βάσει των ηλικιών τους. Η Α΄ ομάδα περιελάμβανε τους μαθητές των νηπίων-Α΄-Β΄ Δημοτικού (n=4) και είχε τη δυνατότητα χρήσης πραγματικού υλικού, ενώ η Β΄ ομάδα τους μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων (Γ΄-Δ΄-Ε΄-ΣΤ΄, n=9) και εργάστηκε με εικονιστικό υλικό. Κάθε παιδί εξετάστηκε ατομικά και η διαδικασία μαγνητοφωνήθηκε ή βιντεοσκοπήθηκε.

Οι ικανότητες των μαθητών ελέγχθηκαν ατομικά μέσα από την επίδοση τους σε 7 έργα, τα 4 από τα οποία ήταν έργα με την κανονικότητα ως αντικείμενο και τα υπόλοιπα 3 έργα με την κανονικότητα ως εργαλείο για την επίλυση προβλήματος συμμεταβολής. Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε 3 από αυτά(Εικόνα 1): Το Έργο 1 αφορούσε σε μια κανονικότητα δομής ΑΒ. Οι μαθητές κλήθηκαν αρχικά να κάνουν διάφορες δράσεις πάνω σε αυτό (επέκταση, συμπλήρωση-μετάφραση,εύρεση προηγούμενου-επόμενου όρου, εύρεση κοντινού όρου). Στη συνέχεια, τους ζητήθηκε να βρουν τον 100^o όρο (100^o τουβλάκι και 100^o βέλος αντίστοιχα για τις 2 ομάδες). Πρόκειται για μια μακρινή γενίκευση, η οποία απαιτεί τη σύνδεση του όρου με τη θέση του, κάτι που απαιτεί συναρτησιακή σκέψη.

Εικόνα 1: Έργα της έρευνας που θα αναλυθούν

Το Έργο 2ήταν προσαρμογή ενός έργου που υπάρχει στη βιβλιογραφία (Stephensetal., 2012): Δίνεται ένα τετράγωνο τραπέζι, γύρω από το οποίο μπορούν να καθίσουν 4 άτομα. Στη συνέχεια, ένα δεύτερο τραπέζι ενώνεται με το πρώτο, γύρω από τα οποία μπορούν να καθίσουν 6 άτομα. Από τους μαθητές της Α΄ Ομάδας ζητήθηκε να βρουν το πλήθος των ατόμων που μπορούν να κάτσουν γύρω από 3, 4 και 10 τραπέζια (κοντινή γενίκευση). Από τη Β΄ ομάδα ζητήθηκε η συμπλήρωση ενός πίνακα τιμών και η εύρεση ενός κοντινού όρου (10ος όρος). Στο πρόβλημα η σχέση συμμεταβολής ανάμεσα στο πλήθος των τραπεζιών (ν) και το πλήθος των ατόμων (2ν+2). είναιγραμμικήμε αρχική τιμή.

Στο Έργο 3 η σχέση μεταξύ των δύο μεγεθών (ν, 2ν) είναι γραμμική χωρίς αρχική τιμή. Οι μαθητές της Α΄ ομάδας κλήθηκαν να βρουν τον αριθμό των γαντιών για μια παρέα 2, 3, 4 και 5 παιδιών με τη χρήση υλικού. Για τη Β΄ ομάδα, το πρόβλημα εμπεριείχε τη συμμεταβολή τριών ποσοτήτων και αφορούσε στην καταγραφή των υλικών για συγκεκριμένο αριθμό γλυκών (2, 3, 5 και 10 ατομικά γλυκά), αφού πρώτα δόθηκαν στους μαθητές τα υλικά που χρειάζονται για ένα γλυκό.

Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών έγινε με βάση τη διάκριση μεταξύ της βαθμωτής και της συναρτησιακής προσέγγισης.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Έργο 1

Όλοι οι μαθητές και των δύο ηλικιακών ομάδων πραγματοποίησαν σωστά την κοντινή γενίκευση με την αναδρομική στρατηγική, εκτός από μια μαθήτρια της Ε΄τάξης, η οποία αν και συνέδεσε τον όρο με τη θέση του, εξηγώντας ότι «*για να βρω το 10ο θα πω.. το 5ο είναι μπλε άρα 5 και 5 δέκα..και το δέκατο θα είναι μπλε*!», βρήκε λάθος αποτέλεσμα.

Στη μακρινή γενίκευση, οι 2 από τους 4 μαθητές της Α΄ Ομάδας προσπάθησαν να μαντέψουν το χρώμα στο 100^{ο} τουβλάκι και δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Ένας μαθητής (Β΄ τάξη) συνέδεσε τον όρο της ακολουθίας με τη θέση του, εξηγώντας ότι κάθε 5^{ο} τουβλάκι θα είναι κίτρινο/κόκκινο εναλλάξ:

Ερευν.: Ποιο πιστεύεις ότι θα βρίσκεται στη θέση 100;

Μ3(Β΄): Δεν υπάρχουν τόσα τουβλάκια…

Ερευν.: Άρα;

Μ3(Β΄): Ίσως κανένα…

Ερευν.: Ωραία, φαντάσου ότι υπάρχουν τόσα…

Μ3(Β΄): χμμ… το κίτρινο!

Ερευν.: Πως το σκέφτηκες;

Μ3(Β΄): Με απλό τρόπο..κόκκινο,κίτρινο,κόκκινο,κίτρινο…

Ερευν.: Κι έφτασες στο 100;

Μ3(Β΄): Σιγά σιγά.. τα μέτρησα πέντε πέντε…

Ερευν.: Δηλαδή; Εξήγησέ μου…

Μ3(Β΄): πέντε… μετά θα βάλω κι άλλη πεντάδα.. θα είναι κίτρινο.. κι άλλη, κι άλλη (τις τοποθετεί τη μια πεντάδα κάτω από την άλλη).. το κόκκινο θα είναι το 20ο , μετά το συνεχίζεις με πεντάδα και φτάνεις στο κίτρινο… και έτσι θα φτάσω στο 100.

Τέλος, ένας μαθητής απάντησε ότι «αφού το 10^{ο} είναι κίτρινο, βάζεις και ένα μηδενικό και είναι πάλι κίτρινο, δεν αλλάζει κάτι.». Ενώ αυτή η απάντηση θα μπορούσε να ερμηνευθεί, παρόμοια με του προηγούμενου μαθητή, ως σύνδεση όρου με τη θέση του, ο μαθητής φαίνεται να εστίασε περισσότερο στη σχέση μεταξύ της ακολουθίας των θέσεων, καθώς δεν ήταν σε θέση να εξηγήσει περαιτέρω το σκεπτικό του.

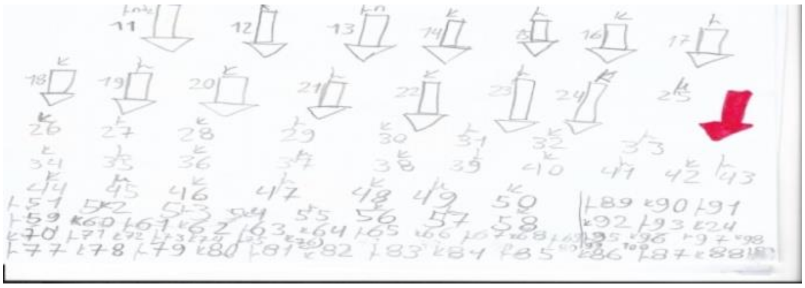
Παρόμοια με τον τελευταίο μαθητή ανταποκρίθηκαν οι 2 από τους 9 μαθητές της Β΄ Ομάδας, οι οποίοι εξέφρασαν με πράξη τη σχέση ανάμεσα στο 10 και το 100 (10x10=100). Έξι μαθητές εγκατέλειψαν την προσπάθεια εφαρμογής της αναδρομικής στρατηγικής ή δεν επιδόθηκαν καθόλου, και προσπάθησαν να μαντέψουν την απάντηση νοερά/τυχαία:

Μ9(Δ΄): Είναι δύσκολο αυτό…

Ερευν.: Τι σε δυσκόλεψε;

Μ9(Δ΄): Δεν μπορώ να βρω το χρώμα… θα βάλω το κόκκινο γιατί αν τελειώνει σε κόκκινο αυτή η σειρά μπορεί να είναι πάλι κόκκινο…

Τέλος, μια μαθήτρια της Γ΄ τάξης βρήκε τον $100^{ο}$ όρο με την αναδρομική στρατηγική (βρίσκοντας δηλαδή πρώτα όλες τους προηγούμενους όρους).



Εικόνα 2: Αναδρομική στρατηγική

Επισημαίνουμε ότι η μαθήτρια της Ε΄, η οποία είχε συνδέσει τον όρο με τη θέση του στην κοντινή γενίκευση, δεν το έκανε στη μακρινή γενίκευση.

Έργο 2

Όλοι οι μαθητές της Α΄ ομάδας κατάφεραν να βρουν τον αριθμό των ατόμων για τα 3 και 4 τραπέζια με τη βοήθεια του πραγματικού υλικού.

Για τα 10 τραπέζια τρεις από τους τέσσερις βρήκαν τον αριθμό με τη χρήση υλικού και ένας μαθητής της Β΄ Δημοτικού φαίνεται να παρατήρησε σε ένα πρώτο επίπεδο τις σχέσεις συμμεταβολής που υπήρχαν, αιτιολογώντας κατάλληλα το σκεπτικό του.

Μ3(Β΄): Χμμ..αφού σε ένα θα καθίσουν 4, σε δύο 6… είναι σχεδόν το διπλάσιο… τότε σε τρία τραπέζια 8 και…κάπως έτσι…(συνεχίζει να μετράει προσθέτοντας 2 κάθε φορά) σε δέκα θα καθίσουν 22 άτομα!

Οι 6 από τους 9 μαθητές της Β΄ ομάδας συμπλήρωσαν τον πίνακα τιμών κάθετα (βαθμωτή στρατηγική) χωρίς να συσχετίζουν τις ποσότητες στις δύο στήλες (εικόνα 3)

Αριθμός τραπεζιών	Αριθμός ατόμων
1	4
2	6
3	10
4	14
5	18
6	22
7	26

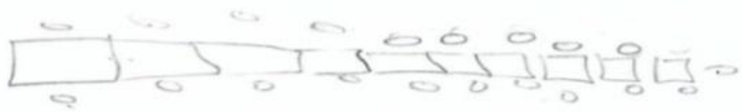
Εικόνα 3: Κάθετη προσθετική συμπλήρωση πίνακα τιμών

Ενδιαφέρον παρουσίασε η στρατηγική της συμπλήρωσης του πίνακα τιμών μιας μαθήτριας της Στ΄ τάξης (εικόνα 4).

Αριθμός τραπεζιών	Αριθμός ατόμων
1	4 ατ.
2	6 ατ.
3	7 ατ.
4	9 ατ.
5	11 ατ.
6	13 ατ.
7	16 ατ.

B) Αν είχε 10 τραπέζια, πόσα άτομα θα μπορούσαν να καθίσουν; Μπορείς να εξηγήσεις το σκεπτικό σου;

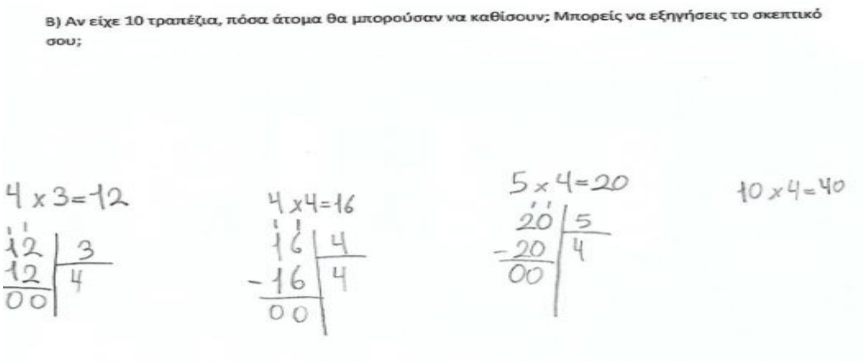
22 ατ γιατί



Εικόνα 4: Επίλυση με τη βοήθεια της αναπαράστασης του προβλήματος

Αρχικά, συμπλήρωσε τον πίνακα τιμών κάθετα και έπειτα με τη βοήθεια της αναπαράστασης στο β΄ ερώτημα τροποποίησε τις απαντήσεις που είχε δώσει συσχετίζοντας με επιτυχία την αριθμητική τιμή των ατόμων με την αριθμητική τιμή των τραπεζιών (συναρτησιακή στρατηγική).

Στο β΄ ερώτημα του ίδιου προβλήματος («κοντινή» γενίκευση) οι 3 από τους 9 μαθητές της Β΄ ομάδαςέκαναν χρήση της βαθμωτής στρατηγικής αλλά απέτυχαν να δώσουν σωστή απάντηση: έκαναν πράξεις, εστίασαν στην πολλαπλασιαστική σχέση και αγνόησαν την αρχική τιμή (Εικόνα 5). Τέσσερις μαθητές προσπάθησαν να απαντήσουν κάνοντας λανθασμένες και βεβιασμένες αναπαραστάσεις, ενώ 2 έδωσαν τυχαία απάντηση.



Εικόνα 5: Επίλυση με πράξεις

Έργο 3

Στο πρόβλημα της ευθείας αναλογίας (γραμμική συμμεταβολή χωρίς αρχική τιμή) οι 3 από τους 4 μαθητές της Α΄ ομάδας βρήκαν τον αριθμό των γαντιών που **χρειάζεται μια παρέα πέντε παιδιών με ευκολία και μάλιστα δύο από αυτούς, για κάθε επιπλέον παιδί μετρούσαν δύο επιπλέον γάντια, φτάνοντας στον υπολογισμό των δέκα γαντιών μετρώντας ανά δύο: στη αναδρομική αυτή στρατηγική μπορούμε να ισχυριστούμε ότι εμφανίζονται στοιχεία συναρτησιακής προσέγγισης.** Ένας μόνο μαθητής δεν κατάφερε να βρει τον αριθμό των γαντιών για 3 και 5 παιδιά.

Οι 5 από τους 9 μαθητές της Β΄ ομάδας αν και χρησιμοποίησαν λέξεις όπως «διπλασιάζω» ή «τριπλασιάζω», που παραπέμπουν στο 2ν και όχι στη σχέση ν→2ν, δεν κατάφεραν να συμπληρώσουν σωστά τις συνταγές. Δύο μαθητές επίσης απέτυχαν να συμπληρώσουν τις συνταγές με τη χρήση της προσθετικής στρατηγικής (προσθέτοντας ένα σταθερό αριθμό κάθε φορά στα υλικά), ενώ σωστές απαντήσεις δόθηκαν από δύο μαθήτριες, οι λεκτικές εξηγήσεις των οποίων είχαν χαρακτηριστικά κατανόησης της συμμεταβολής γλυκών-υλικών.

Μ6(Γ΄): για να βρω το γάλα για τα 5 γλυκά..μμμ.. για να δω.. για 1 γλυκό 2 ποτήρια, για 5… 5 φορές το 2…δηλαδή 10 ποτήρια! Το ίδιο και για τα αυγά… 3 φορές το 5..15!

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα της έρευνας είναι συμβατά με προηγούμενες έρευνες που δείχνουν ότι οι μαθητές της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης αν και αντιλαμβάνονται σε ικανοποιητικό βαθμό της έννοια της κανονικότητας (Τζεκάκη & Κούλελη, 2007;Fox, 2005), εντούτοις φαίνεται ότι συναντούν δυσκολία στη μακρινή γενίκευση, η οποία απαιτεί συναρτησιακή σκέψη (Blanton&Kaput, 2004, 2011).

Σε συμφωνία με την προϋπάρχουσα έρευνα, στα έργα συμμεταβολής η πλειοψηφία των μαθητών εστίασε, σωστά ή λανθασμένα, κυρίως στη μεταβολή της μίας από τις δύο ποσότητες. Υπήρχαν επίσης περιπτώσεις που επιφανειακών στρατηγικών, όπως η «μαντεψιά» (Lannin, 2005). Εντούτοις υπήρξαν μαθητές που χρησιμοποίησαν τρόπους και αιτιολογίες που δίνουν ενδείξεις συναρτησιακής προσέγγισης. Πρέπει εδώ να τονίσουμε ότι η βιβλιογραφία θέλει τους μαθητές της προσχολικής και σχολικής ηλικίας ικανούς να αναγνωρίζουν και να εκφράζουν σχέσεις συμμεταβολής σε γραμμικά προβλήματα με ή χωρίς αρχική τιμή, αλλά ύστερα από κατάλληλη διδακτική παρέμβαση (Stephensetal., 2012; Warren, 2005; Blanton & Kaput, 2004).

Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι οι μαθητές της Α΄ ομάδας είχαν σε αρκετές περιπτώσεις καλύτερη απόδοση σε σχέση με τους μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα γραμμικής συμμεταβολής με αρχική τιμή, η Α΄ ομάδα φαίνεται να υπερτερεί της Β΄. Ενδεχομένως όμως αυτό να οφείλεται, στη χρήση πραγματικού υλικού από την Α΄ ομάδα. Η ύπαρξη αρχικής τιμής και η μη δυνατότητα χρήσης πραγματικού υλικού για τη Β΄ ομάδα ίσως κατέστησε δυσκολότερη την επίλυση του προβλήματος, καθώς αντίστοιχες έρευνες σε έργα με απλή γραμμική σχέση χωρίς την ύπαρξη αρχικής τιμής αναδεικνύουν επιτυχίες των μαθητών σε ζητήματα κατανόησης και έκφρασης της συμμεταβολής (Panorkou& Maloney, 2016). Το γεγονός αυτό δίνει αφορμή για σκέψεις πάνω στη χρήση εμπράγματου υλικού και στα μεγαλύτερα παιδιά. Ειδικά στα ζητήματα συμμεταβολής, το εμπράγματο υλικό καθιστά «παρούσες» και τις δύο μεταβλητές και δημιουργεί ενδεχομένως ένα καταλληλότερο πλαίσιο για την εννοιολογική προσέγγιση των συναρτήσεων.

Εν κατακλείδι, αν και το δείγμα της έρευνας είναι μικρό και τα απολέσματα όχι γενικεύσιμα, θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι οι όποιες δυσκολίες δεν οφείλονται σε αναπτυξιακούς περιορισμούς--αφού και μικροί μαθητές χρησιμοποίησαν συναρτησιακή συλλογιστική-- αλλά κυρίως στην έλλειψη εμπειριών στο σχολικό πλαίσιο. Θα άξιζε, λοιπόν, να διερευνηθεί η επίδραση οργανωμένων διδακτικών παρεμβάσεωναπό τα πρώτα σχολικά χρόνια με εστίαση σε έργα συμμεταβολής δύο ή και περισσότερων ποσοτήτων, με κατάλληλη στήριξη και ανατροφοδότηση των εκπαιδευτικών (Blanton & Kaput, 2011; Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2015)..

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βαμβακούση, Ξ. & Καλδρυμίδου, Μ. (2015). Σχεδιασμός δραστηριοτήτων για τη διδασκαλία κανονικοτήτων από μελλοντικές νηπιαγωγούς: δυσκολίες και προβλήματα. Στο Δ. Δεσλή, Ι.

Παπαδόπουλος, Μ. Τζεκάκη, *Πρακτικά 6ου Συνεδρίου ΕΝΕΔΙΜ*, (σελ. 208-217). Θεσ/νίκη: ΕΝΕΔΙΜ.

Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. *Proceedings of the 28th -PME*,(Vol. *2*,pp.135-142). Bergen, Norway:PME.

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades.In J. Cai& E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization*, (pp. 5-24).Berlin: Springer-Verlag.

Fox, J. (2005). Child-initiated mathematical patternning in the pre-compulsory years. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME*, (Vol. *2*, pp. 313-320). Melbourne: PME.

Kaldrimidou, M., Moroglou, M. (2009). On functions: Representations and students' conceptions. In M.Tzekaki, M. Kaldrimidou, H. Sakonidis (eds) *Proceedings of the 33rd PME*. (Vol. 3, pp. 265-272).Thessaloniki, Greece: PME.

Κυλάφης, Π. (2009). *Ο ρόλος των patterns στη μετάβαση από την αριθμητική στην άλγεβρα*. ΑδημοσίευτηΜεταπτυχιακήΔιατριβή, ΕΚΠΑ.

Lannin, J.K. (2005). Generalization and justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities, *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258.

Martinez, M., Brizuela, B. (2006). An unexpected way of thinking about linear function tables. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of 30th PME*, (Vol.4,pp. 153-160). Prague, Czech Republic: PME

Mulligan, J., Mitchelmore, M., Marston, J., Highfield, K., Kemp, C. (2008). Promoting mathematical pattern and structure in the first year of schooling: An intervention study. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano& A.Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*(Vol. 4, pp. 129-136). México: Cinvestav-UMSNH.

Papic, M. & Mulligan, J. T. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. In J. Watson, & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (Vol. 2, pp. 591-600). Adelaide: MERGA.

Panorkou, N., Maloney, P.A. (2016). Expressing covariation and correspondence relationships. *Teaching Children Mathematics*, *23*(2), 90-99.

Stephens, A., Isler I., Marum, T., Blanton, M., Knuth, E., Murphy Gardiner, A. (2012).From recursive pattern to correspondence rule: Developing students' abilities to engage in functional thinking. In L.R Van Zoest, J.-J. Lo, & J.L Kratky (Eds.), *Proceedings of the 34th Annual Meeting of NA-PME*, (pp. 821-828).Kalamazoo, MI: Western Michigan University.

Τζεκάκη, Μ. & Κούλελη, Μ. (2007). Διερεύνηση της ικανότητας αναγνώρισης προτύπων σε παιδιά προσχολικής ηλικίας, στο Χ. Σακονίδης & Δ. Δεσλή (επιμ.), *Πρακτικά του 2ου ΣυνεδρίουΕΝΕΔΙΜ,* (σελ.267-278). Αθήνα: Τυπωθήτω&ΕΝΕΔΙΜ.

Warren, E. (2005). Patterns supporting the development of early algebraic thinking. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*(pp.759-766).Sydney: MERGA.