ΥΠΟΣΤΗΡΙΖΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΤΩΝ ΝΗΠΙΩΝ: ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

Γεωργία Πήττα, Μαρία Καλδρυμίδου, Ξένια Βαμβακούση

Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

ge_pi@yahoo.gr mkaldrim@uoi.gr xvamvak@uoi.gr

Στην εργασία αυτή διερευνούμε τη δυνατότητα υποστήριξης της πολλαπλασιαστικής σκέψης των παιδιών πρωτοσχολικής ηλικίας. Σχεδιάσαμε μια παρέμβαση βασισμένη στην παροχή γλωσσικών εργαλείων για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων και την επίλυση προβλημάτων με ισομερισμό, μέτρηση με διαφορετικές μονάδες και επανάληψη ποσότητας, ενέργειες που θεωρούνται θεμελιώδεις για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης. Η παρέμβαση δοκιμάστηκε με μια μελέτη περίπτωσης με ημι-πειραματικό σχεδιασμό σε μία ομάδα τεσσάρων νηπίων. Η παρέμβαση ήταν στο πλαίσιο των δυνατοτήτων των παιδιών και προκάλεσε βελτιώσεις στην επίδοσή τους και στην ποιότητα των εξηγήσεών τους.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Ένα πλήθος ερευνητικών δεδομένων τεκμηριώνουν την ύπαρξη πρώιμων ικανοτήτων πολλαπλασιαστικής σκέψης από πολύ μικρές ηλικίες (Mix, Huttenlocher & Levine, 2002). Πράγματι, υπό κατάλληλες συνθήκες, μικρά παιδιά, ακόμα και βρέφη, διακρίνουν μεταβολές στο λόγο μεταξύ δύο ποσοτήτων και επεξεργάζονται αναλογικές σχέσεις σε αντιληπτικό επίπεδο. Παιδιά 6 ετών, αν τους δοθούν αρκετά παραδείγματα μιας συγκεκριμένης σχέσης μέρους-όλου σε σχήματα με ένα σκιασμένο μέρος, τότε μπορούν να επιλέξουν, ανάμεσα σε άλλα, ένα μοντέλο που αναπαριστά την ίδια σχέση. Επίσης, παιδιά ηλικίας 6-7 ετών, όταν τους παρουσιάζονται αρκετά παραδείγματα ενός πολλαπλασιαστικού μετασχηματισμού επί ποσοτήτων (συνεχών ή διακριτών), είναι σε θέση να προβλέψουν τι θα συμβεί σε μια νέα ποσότητα (McCrink & Spelke, 2016). Τα μικρά παιδιά αναπτύσσουν ή υιοθετούν αποτελεσματικές στρατηγικές αντιμετώπισης πολλαπλασιαστικών καταστάσεων (π.χ. δίκαιης μοιρασιάς) και κάποια εξάγουν τις αρχές που τις διέπουν (π.χ., «όσο περισσότεροι οι παραλήπτες, τόσο μικρότερα τα μερίδια», Kornilaki & Nunes, 2005). Οι πρώιμες αυτές ικανότητες έχουν, φυσικά, περιορισμούς ως προς τις συνθήκες και τα πλαίσια στα οποία εκδηλώνονται. Για παράδειγμα, η σχέση 1:2 είναι πιο αναγνωρίσιμη από τα παιδιά από άλλες σχέσεις (Hunting & Davis, 1991, Spinillo & Bryant, 1991). Ένα σημαντικό εύρημα είναι ότι στο πλαίσιο της αντιληπτικής αναγνώρισης τα παιδιά τα πηγαίνουν καλύτερα, όταν οι ποσότητες είναι συνεχείς. Αντίθετα, στο πλαίσιο των πολλαπλασιαστικών καταστάσεων τα πηγαίνουν καλύτερα στις διακριτές, κάτι που αποδίδεται μάλλον σε διαδικαστικές δυσκολίες, παρά στην κατανόηση της κατάστασης (Kornillaki & Nunes, 2005). Πρέπει να τονιστεί ότι οι σχετικές εμπειρίες των παιδιών, στο πλαίσιο της άτυπης ή της τυπικής εκπαίδευσης, ευνοούν την εκδήλωση και ενίσχυση αυτών των ικανοτήτων (Hunting & Davis, 1991), γεγονός που θέτει ένα ζητούμενο για την εκπαίδευση.

Τα δεδομένα αυτά δεν έχουν αξιοποιηθεί επαρκώς στην πρωτοσχολική εκπαίδευση. Πράγματι, εδώ και δεκαετίες έχει επισημανθεί από πολλούς ερευνητές (π.χ. Hunting & Davis, 1991) ότι στα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης δίνεται δυσανάλογα μεγάλη βαρύτητα στην πρόσθεση και τις προσθετικές σχέσεις στο πλαίσιο των φυσικών αριθμών. Αυτό συμβαίνει ακόμα και σε αναλυτικά προγράμματα που ενσωματώνουν ρητούς στόχους για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση ήδη από το νηπιαγωγείο, όπως είναι το πιο πρόσφατο ελληνικό πρόγραμμα σπουδών (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018). Ειδικά για το νηπιαγωγείο, οι Βαμβακούση και Καλδρυμίδου επισήμαναν δύο κεντρικά ζητήματα: α) όλοι οι στόχοι που αφορούν την πολλαπλασιαστική σκέψη περιορίζονται στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων και άρα η αντιληπτική ευχέρεια των παιδιών στο πλαίσιο των συνεχών ποσοτήτων δεν αξιοποιείται και β) λείπουν τα κατάλληλα γλωσσικά εργαλεία που θα μπορούσαν να υποστηρίξουν την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων, όπως για παράδειγμα, οι όροι «μισό» και «διπλάσιο». Το δεύτερο ζήτημα είναι ιδιαίτερα σημαντικό, καθώς οι άτυπες εμπειρίες των παιδιών με καταστάσεις στις οποίες ενυπάρχει μια πολλαπλασιαστική σχέση δε συνεπάγονται απαραίτητα την αναγνώριση της κοινής σχεσιακής βάσης αυτών των καταστάσεων (Hunting & Davis, 1991). Τα γλωσσικά εργαλεία στο πλαίσιο δομημένων εμπειριών είναι ένα μέσο που θα μπορούσε να υποστηρίξει τα παιδιά προς αυτή την κατεύθυνση.

Σκοπός αυτής μελέτης είναι να διερευνήσει τις δυνατότητες υποστήριξης παιδιών πρωτοσχολικής ηλικίας να αναγνωρίσουν, να διαχειριστούν και να εκφράσουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ τόσο διακριτών, όσο και συνεχών ποσοτήτων, στο πλαίσιο πολλαπλασιαστικών καταστάσεων οι οποίες απαιτούν τις ενέργειες του ισομερισμού, της μέτρησης με διαφορετικές μονάδες και της επανάληψης μιας ποσότητας που αναγνωρίζονται ως βάσεις της πολλαπλασιαστικής σκέψης (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018). Σχεδιάσαμε μια παρέμβαση που βασίστηκε στην επίλυση προβλημάτων πολλαπλασιαστικής δομής που απαιτούν τις παραπάνω ενέργειες και στην παροχή γλωσσικών εργαλείων για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων. Υποθέσαμε ότι η παρέμβαση αυτή θα ήταν στο πλαίσιο των δυνατοτήτων των παιδιών πρωτοσχολικής ηλικίας και ότι θα βελτίωνε την ικανότητά τους να πραγματεύονται (δηλ. να επιλύουν αιτιολογώντας την απάντησή τους) προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης με ημι-πειραματικό σχεδιασμό (προέλεγχος-παρέμβαση-μεταέλεγχος, χωρίς ομάδα ελέγχου).

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες ήταν τέσσερα παιδιά από 5 ετών και 7 μηνών έως 6 ετών που παρακολουθούσαν τις δραστηριότητες ενός Κέντρου Δημιουργικής Απασχόλησης (ΚΔΑΠ) του Νομού Άρτας. Από αυτά το ένα ήταν κορίτσι (5 ετών 9 μηνών) που θα αναφέρεται στη συνέχεια με το ψευδώνυμο Μαρία. Τα υπόλοιπα ήταν αγόρια με τα ψευδώνυμα Κώστας (ηλικίας 6 ετών), Νίκος (ηλικίας 5 ετών και 5 μηνών) και Χάρης (ηλικίας 5 ετών και 7 μηνών). Τα παιδιά είχαν μόλις αποφοιτήσει από το ίδιο δημόσιο νηπιαγωγείο, στο οποίο είχαν εκτεθεί σε καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς στα δύο, στο πλαίσιο διακριτών ποσοτήτων, χωρίς υπόλοιπο.

Ερευνητικά εργαλεία

Για τις ανάγκες του προελέγχου σχεδιάστηκε ένα εργαλείο με 3 έργα (Α, Β, Γ), με 4 δοκιμές το καθένα, τα οποία εξέταζαν τη σχέση 1:2 και 2:1 για διακριτές και συνεχείς ποσότητες. Οι διακριτές ποσότητες αναπαραστάθηκαν με κουκκίδες από χαρτόνι και οι συνεχείς με ορθογώνια από χαρτόνι.

Η κατηγορία Α αφορούσε την αντιληπτική αναγνώριση των σχέσεων. Σε κάθε δοκιμή δόθηκαν δύο παραδείγματα της σχέσης (Χ1:Υ1, Χ2:Υ2) με την πληροφορία ότι «το Χ1 ταιριάζει με το Υ1» και «το Χ2 ταιριάζει με το Υ2». Στη συνέχεια δόθηκε μια ποσότητα Ζ, και ζητήθηκε το Ω, ώστε να διατηρείται η σχέση («Ποιο πιστεύεις ότι ταιριάζει με το Ζ;»).

Στο έργο Β αξιοποιήθηκε το πλαίσιο της δίκαιης μοιρασιάς. Δόθηκε η πληροφορία ότι δυο αδέρφια μοιράζονται δίκαια καραμέλες (διακριτή ποσότητα) και πλάκες σοκολάτας (συνεχής ποσότητα). Για τη σχέση 1:2 δόθηκε η αρχική ποσότητα και ζητήθηκε το μερίδιο, ενώ για τη 2:1 δόθηκε το μερίδιο και ζητήθηκε η αρχική ποσότητα.

Στα έργο Γ ζητήθηκε ρητά από τα παιδιά να βρουν το μισό και το διπλάσιο διακριτών και συνεχών ποσοτήτων και ρωτήθηκαν αν γνωρίζουν τους όρους αυτούς.

Για να αποφευχθούν διαδικαστικές δυσκολίες, σε όλες τις δοκιμές δόθηκαν 5 εναλλακτικές ποσότητες στα παιδιά για να επιλέξουν μία. Σε κάθε δοκιμή ζητήθηκε από τα παιδιά να εξηγήσουν τις απαντήσεις τους («Γιατί πιστεύεις ότι ταιριάζει αυτό;», «Πώς το ξέρεις ότι είναι αυτό;»).

Στο μεταέλεγχο προστέθηκε ένα επιπλέον έργο (Δ) που αφορούσε τις σχέσεις 1:3 και 3:1 και ήταν ίδιας μορφής με το έργο Γ, που είναι και η πιο απαιτητική. Η επιλογή να μην εξεταστούν οι σχέσεις αυτές με έργα τύπου Α και Β έγινε γιατί το εργαλείο περιλάμβανε ήδη πολλές δοκιμασίες για παιδιά αυτής της ηλικίας.

Διαδικασία

Η παρέμβαση έγινε ομαδικά, σε χώρο του ΚΔΑΠ, σε 4 συνεχόμενες ημέρες (μία συνάντηση ανά ημέρα, διάρκειας περίπου 45΄ λεπτών). Ο προέλεγχος και ο μεταέλεγχος έγιναν μια ημέρα πριν και δυο ημέρες μετά την παρέμβαση, αντίστοιχα. Κάθε παιδί εξετάστηκε ατομικά στον ίδιο χώρο. Τα παιδιά και οι γονείς τους έδωσαν τη συγκατάθεσή τους για τη συμμετοχή τους στην έρευνα. Η χρονική διάρκεια παρουσίας της ερευνήτριας (πρώτη συγγραφέας) στο χώρο του ΚΔΑΠ καθορίστηκε από τους υπευθύνους του.

Σχεδιασμός της παρέμβασης

Στην παρέμβαση χρησιμοποιήθηκαν δύο ειδών δραστηριότητες. Η πρώτη βασίστηκε στη δίκαιη και στην αναλογική μοιρασιά και περιλάμβανε τις διαφορετικές πολλαπλασιαστικές καταστάσεις που μπορούν να προκύψουν σε αυτό το πλαίσιο και που αντιστοιχούν σε διαίρεση μερισμού, πολλαπλασιασμό και διαίρεση μέτρησης. Συνολικά, τα παιδιά αντιμετώπισαν 24 τέτοιες πολλαπλασιαστικές καταστάσεις στη διάρκεια των δύο πρώτων ημερών. Το σενάριο της δραστηριότητας βασίστηκε στην ιδέα φανταστικών «πλασμάτων» (ράβδοι από χαρτόνι, ίδιου πλάτους και μεταβλητού μήκους) που παίρνουν το μερίδιο που τους αναλογεί από διακριτές ποσότητες (π.χ., «καραμέλες») και συνεχείς ποσότητες (π.χ. «σοκολάτες»). Το μερίδιο ήταν συνάρτηση του ύψους των ράβδων, που βρίσκονταν σε σχέση 1:1 (ίσα μερίδια), 1:2 και 1:3 (ανάλογα μερίδια).

Η δεύτερη δραστηριότητα βασίστηκε στην ιδέα της «κλασματομηχανής» (βλ. Hunting & Davis, 1991), δηλ. μιας μηχανής που βρίσκει ένα δεδομένο κλάσμα των εισερχόμενων ποσοτήτων. Χρησιμοποιήσαμε μηχανές που πολλαπλασιάζουν (από τη μια μεριά) και υπο-πολλαπλασιάζουν (από την άλλη μεριά) κατά ένα δεδομένο τελεστή (σε αυτή την περίπτωση κατά 2, 3, ή 4) μια ποσότητα. Τα παιδιά κλήθηκαν να βρουν το πολλαπλάσιο ή υποπολλαπλάσιο δεδομένων διακριτών και συνεχών ποσοτήτων σε συνολικά 23 δοκιμές στις 2 τελευταίες μέρες.

Οι όροι «διπλάσιο» και «τριπλάσιο» εισήχθησαν με βάση την επανάληψη μιας δεδομένης ποσότητας και τη σχέση της ποσότητας αυτής με το πολλαπλάσιό της («πόσες φορές χωράει»). Ο όρος «μισό» ήταν ήδη οικείος στα παιδιά στο πλαίσιο του μερισμού σε δύο ίσα μέρη. Ο όρος «ένα τρίτο» εισήχθη με βάση τον ισομερισμό. Δεδομένης της δυσκολίας ισομερισμού στα τρία στις συνεχείς ποσότητες, δίνονταν εναλλακτικές «κλασματικές» ποσότητες (αντίστοιχες με το 1/2, 1/3, 1/4 ή 1/5 της αρχικής ποσότητας). Τα παιδιά αρχικά εκτιμούσαν, επέλεγαν και στη συνέχεια έλεγχαν την επιλογή τους εξετάζοντας πόσες φορές χωράει στην αρχική ποσότητα.

Απ' όσο είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε, δεν υπάρχει στη βιβλιογραφία παρέμβαση με αυτά τα χαρακτηριστικά (ενιαία αντιμετώπιση διακριτών και συνεχών ποσοτήτων, έμφαση σε όρους που εκφράζουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις, τόσο για πολλαπλάσια, όσο και για υποπολλαπλάσια, καθώς και αξιοποίηση όλων των θεμελιωδών ενεργειών) για παιδιά αυτής της ηλικίας, αλλά και γενικότερα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ανταπόκριση των παιδιών στην παρέμβαση

Οι δραστηριότητες της παρέμβασης ενείχαν προκλήσεις που δεν είχαν αντιμετωπίσει ξανά τα παιδιά, τουλάχιστον στο πλαίσιο της τυπικής εκπαίδευσης. Για παράδειγμα, την ατελή διαίρεση διακριτής ποσότητας στα δύο, την τέλεια διαίρεση στα τρία, καθώς και τον ισομερισμό συνεχών ποσοτήτων. Τα παιδιά επινόησαν αποτελεσματικές στρατηγικές όπως η μοιρασιά «ένα-ένα στον καθένα» μέχρι να τελειώσουν τα αντικείμενα και η δίπλωση στα δύο, αλλά και αναποτελεσματικές στρατηγικές (π.χ, για τον ισομερισμό στα τρία. Δεδομένου του περιορισμένου χώρου, θα παρουσιάσουμε παραδείγματα που δείχνουν πώς τα παιδιά πράγματι χρησιμοποιούν τους καινούργιους όρους και τις ενέργειες του ισομερισμού, της επανάληψης ποσότητας και της μέτρησης για να αντιμετωπίσουν τα προβλήματα και να ελέγξουν τις απαντήσεις τους στο πλαίσιο της παρέμβασης. Τα παραδείγματα είναι από την 4η ημέρα της παρέμβασης.

Στο πρώτο παράδειγμα, η ερευνήτρια παρουσιάζει για πρώτη φορά τη μηχανή με τελεστή 3 για διακριτές ποσότητες και ετοιμάζεται να δείξει παραδείγματα για τον τριπλασιασμό. Ο Κώστας αντιλαμβάνεται τη σχέση με το πρώτο παράδειγμα και δίνει ένα δεύτερο, ενώ ο Χάρης περιγράφει ποια είναι η ποσότητα που επαναλαμβάνεται και ποιος ο τελεστής:

Ε: Αυτή η μηχανή δουλεύει με καραμέλες. Αν βάλω μέσα αυτή την καραμέλα θα μου βγάλει από την μεγάλη πλευρά τρεις καραμέλες.

Κ.: Τριπλάσιο. Και άμα βάλεις δύο θα τις κάνει έξι.

Ε: Πώς το ξέρεις αυτό;

Κ: Γιατί θα επαναλάβει δύο φορές το τρία.

Χ: Όχι, τρεις φορές το δύο. Αφού δύο είναι οι καραμέλες.

Στη συνέχεια, η ερευνήτρια εισάγει την αντίστοιχη μηχανή για τις συνεχείς ποσότητες (μακρόστενα «ζαχαρωτά», μεταβάλλεται το μήκος τους).

Ε: Για πάμε τώρα να σας δείξω τι γίνεται αν βάλουμε ένα ζαχαρωτό από τη μεγάλη πλευρά. Τι λέτε να μου βγάλει από την άλλη πλευρά;

Ν.: Θα το μοιράσει.

Κ.: Ναι, τρεις φορές.

Μ. Έχεις μικρά κομματάκια; [Δοκιμάζει διάφορα κομμάτια μέχρι που βρίσκει αυτό που χωράει τρεις φορές στο ζαχαρωτό.]

Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης παρατηρήθηκε ότι τα παιδιά έκαναν απόπειρες να γενικεύσουν, είτε τις διαδικασίες, είτε τους καινούργιους όρους, ιδιαίτερα για τα πολλαπλάσια. Για παράδειγμα, ο Χάρης περιγράφει τη λειτουργία της μηχανής με τελεστή 4 ως εξής:

Χ: Ε, αυτό κάνουν αυτές οι μηχανές. Από τη μία το βγάζει τέσσερις φορές το ίδιο και από την άλλη το μοιράζει τέσσερις φορές

Ο Νίκος, στο τέλος των δραστηριοτήτων με τις «κλασματομηχανές» ρωτάει:

Ν: Κυρία, πότε θα έρθει ο εκτραπλάσιος; [...] Αυτός που τα κάνει έξι φορές.

Επιδόσεις

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι σωστές (1) και λάθος (0) επιλογές ανά παιδί και ανά έργο στα κοινά έργα του Προελέγχου και του Μεταελέγχου (Α, Β, Γ) και στο επιπλέον έργο του Μεταελέγχου (Δ, στις σκιασμένες γραμμές).

Από τα στοιχεία του Πίνακα 1 φαίνεται ότι, μετά την παρέμβαση, στα κοινά έργα του προελέγχου και του μεταελέγχου αυξάνεται το πλήθος των σωστών απαντήσεων, τόσο συνολικά, όσο και ανά παιδί, για τις διακριτές, καθώς και για τις συνεχείς ποσότητες. Πιο συγκεκριμένα, για τις διακριτές ποσότητες στο σύνολο των απαντήσεων όλων των παιδιών στις 6 δοκιμές (N=24), το ποσοστό των σωστών απαντήσεων αυξήθηκε από 29,2% σε 75%. Το αντίστοιχο ποσοστό για τις συνεχείς ποσότητες αυξήθηκε από 33,3% σε 79,2%. Στο επιπλέον έργο του μεταελέγχου, κάθε παιδί απάντησε σωστά σε 1 από τις 4 δοκιμές και, μάλιστα, κάθε παιδί σε διαφορετική δοκιμή.

Ποσότητα/ Σχέση	Δοκιμή	Προέλεγχος					Μεταέλεγχος				
		Κ	Μ	Ν	Χ	Σύνολο	Κ	Μ	Ν	Χ	Σύνολο
Διακριτή/1:2	Α2	0	1	0	0	1	1	0	1	1	3
	Β2	0	1	1	0	2	1	1	1	1	4
	Γ2	1	1	0	1	3	0	1	0	1	2
Διακριτή/2:1	Α4	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1
	Β4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	4
	Γ4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	4
	Σύνολο	1	3	2	1	7	4	4	4	6	18
Συνεχής /1:2	Α1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2
	Β1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1
	Γ1	0	1	1	1	3	1	1	1	1	4
Συνεχής /2:1	Α3	1	0	1	1	3	1	1	1	1	4
	Β3	0	0	0	0	0	1	1	1	1	4
	Γ3	1	0	0	0	1	1	1	1	1	4
	Σύνολο	2	1	3	2	8	4	5	4	6	19
Διακριτή/1:3	Δ2	-	-	-	-	-	1	0	0	0	1
Διακριτή/3/1	Δ4	-	-	-	-	-	0	0	1	0	1
Συνεχής/1:3	Δ1	-	-	-	-	-	0	0	0	1	1
Συνεχής/3:1	Δ3	-	-	-	-	-	0	1	0	0	1
	Σύνολο	-	-	-	-	-	1	1	1	1	4

Πίνακας 1: Σωστές και λανθασμένες απαντήσει στον προέλεγχο και τον μεταέλεγχο, ανά κατηγορία έργου και ανά παιδί.

Εξηγήσεις

Οι εξηγήσεις των παιδιών κατά τη διάρκεια του προελέγχου και του μεταελέγχου μπορούν να ομαδοποιηθούν σε δύο αδρές κατηγορίες. Η πρώτη (Μη έγκυρες εξηγήσεις) περιλαμβάνει μη εξηγήσεις του τύπου «το είδα», «έτσι είναι», ψευδοεξηγήσεις του τύπου «γιατί θα τη φάει μετά το φαγητό» που σχετίζονται με το πλαίσιο, αλλά όχι με το μαθηματικό περιεχόμενο των έργων και ψευδομαθηματικές εξηγήσεις, στις οποίες τα παιδιά ενέπλεξαν κάποια στοιχεία του μαθηματικού περιεχομένου (συνήθως, αριθμητικά) που όμως δε σχετίζονταν με τα δεδομένα της κατάστασης. Για παράδειγμα, στον Κώστα δίνεται η πληροφορία ότι οι 3 κουκκίδες «ταιριάζουν» με τις 6 κουκκίδες, και η 1 κουκκίδα «ταιριάζει» με τις 2 κουκκίδες – του ζητείται να αποφανθεί με πόσες κουκκίδες «ταιριάζουν» οι 2 κουκκίδες.

Κ: [Δείχνει την κάρτα που επιλέγει. Η κάρτα έχει 3 κουκκίδες.]

Ε: Γιατί;

Κ: Γιατί ένα και ένα μας κάνουν δύο και άλλο ένα μας κάνει τρία.

Η δεύτερη κατηγορία (Έγκυρες εξηγήσεις) περιλαμβάνει τις εξηγήσεις, στις οποίες τα παιδιά, είτε λεκτικά, είτε μη λεκτικά (π.χ., με χειρονομίες) εκφράζουν κατάλληλες στρατηγικές που χρησιμοποιούν για να επιλέξουν ή να ελέγξουν την ορθότητα της επιλογής τους. Με μία μόνο εξαίρεση, οι εξηγήσεις αυτές συνοδεύουν σωστές απαντήσεις και εμφανίζονται τόσο για τις διακριτές, όσο και για τις συνεχείς ποσότητες.

Στα παρακάτω αποσπάσματα παρουσιάζονται τρία παραδείγματα. Στο πρώτο, ο Νίκος εξηγεί τι είναι το μισό μιας δεδομένης συνεχούς ποσότητας.

Ν: Ναι, το κόβουμε στη μέση και μένει το μισό. [Δείχνει με το χέρι του την μέση της σοκολάτας ενώ περιγράφει την διαδικασία] Και μένει ένα άλλο χαρτόνι που είναι μικρότερο και είναι όσο αυτό [Δείχνει το μισό]. Και μένει και το άλλο κομμάτι που είναι το μισό! Είναι ίδιο με το άλλο! Να δες [Ταυτίζει τα δύο κομμάτια].

Στο δεύτερο παράδειγμα, η Μαρία εξηγεί πώς επέλεξε το διπλάσιο μιας συνεχούς ποσότητας, μετρώντας την ποσότητα με το μισό της.

Μ: Με αυτή την μικρούλα ποια θα ταιριάξω; Με αυτή [δείχνει με το χέρι].

Ε: Γιατί;

Μ: Γιατί την γεμίζουμε με ένα άλλο τέτοιο ίδιο κομματάκι. Όπως και τις άλλες. Έχουν δύο ίδια κομματάκια που χωράνε.

Στο τρίτο παράδειγμα, ο Χάρης φαίνεται να αξιοποιεί την κεντρική αρχή ότι σε μια δίκαιη μοιρασιά τα μερίδια πρέπει να είναι ίσα για να υπολογίσει το πλήθος της αρχικής ποσότητας που μοιράστηκε:

Ε: Πόσες ήταν οι καραμέλες δηλαδή; Αν πήρε δύο η Ελενίτσα….

Χ: ….Και δύο η αδερφούλα της.

Ε: Και όλες μαζί πόσες ήταν;

Χ: Τέσσερις. Και μετά έγιναν δύο για την κάθε μία.

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά το πλήθος των έγκυρων και μη έγκυρων εξηγήσεων που δόθηκαν στο σύνολο των δοκιμών των κοινών έργων του προελέγχου και μεταελέγχου, και του επιπλέον έργου του μεταελέγχου (στις σκιασμένες γραμμές), ανά παιδί.

Εξηγήσεις	Προέλεγχος					Μεταέλεγχος				
	Κ	Μ	Ν	Χ	Σύνολο	Κ	Μ	Ν	Χ	Σύνολο
Μη έγκυρες	12	11	12	10	45	4	5	7	2	18
Έγκυρες	0	1	0	2	3	8	7	5	10	30
Σύνολο	12	12	12	12	48	12	12	12	12	48
Μη έγκυρες						3	4	2	4	13
Έγκυρες	-	-	-	-		1	0	2	0	3
Σύνολο	-	-	-	-		4	4	4	4	16

Πίνακας 2: Συχνότητα των έγκυρων και μη έγκυρων εξηγήσεων στο σύνολο των δοκιμών, ανά παιδί.

Με βάση τα δεδομένα του Πίνακα 2, διαπιστώνεται μια αξιόλογη αύξηση των έγκυρων εξηγήσεων στα κοινά έργα μετά την παρέμβαση, τόσο συνολικά, όσο και ανά παιδί. Πιο συγκεκριμένα, στο σύνολο των εξηγήσεων όλων των παιδιών στις 12 δοκιμές (Ν=48), το ποσοστό των έγκυρων εξηγήσεων αυξήθηκε από 6,3% σε 62,5%, με τις έγκυρες εξηγήσεις να αποτελούν την επικρατούσα κατηγορία. Στο επιπλέον έργο (Δ), αντίθετα, η επικρατούσα κατηγορία είναι οι μη έγκυρες εξηγήσεις, με τις έγκυρες εξηγήσεις να προέρχονται από δύο παιδιά.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σχεδιάσαμε και δοκιμάσαμε μια παρέμβαση για την υποστήριξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης παιδιών πρωτοσχολικής ηλικίας. Κεντρικοί πυλώνες της παρέμβασης ήταν η χρήση γλωσσικών όρων που εκφράζουν πολλαπλασιαστικές σχέσεις, και η έκθεση των παιδιών σε πολλαπλασιαστικές καταστάσεις οι οποίες απαιτούν θεμελιώδεις ενέργειες για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018). Η παρέμβαση είχε περιορισμούς, με κύριους τη μικρή διάρκειά της και το, αναλογικά, μεγάλο πλήθος των δραστηριοτήτων που περιελάμβανε που δημιούργησαν μια συνθήκη πυκνής παρουσίασης των έργων. Παρά το γεγονός αυτό, τα αποτελέσματα είναι ενθαρρυντικά. Η παρέμβαση προκάλεσε αξιόλογη βελτίωση, τόσο στην επίδοση, όσο και στην ποιότητα των εξηγήσεων όλων των παιδιών, όσον αφορά τις σχέσεις 1:2 και 2:1. Όσον αφορά τις σχέσεις 1:3 και 3:1 που εξετάστηκαν μόνο στο μεταέλεγχο, τα παιδιά τα πήγαν σαφώς λιγότερο καλά σε σχέση με τις προηγούμενες (όπως μπορεί να διαπιστωθεί συγκρίνοντας το έργο Δ με το παρόμοιο έργο Γ, στον Πίνακα 1). Φαίνεται ότι τα παιδιά αξιοποίησαν τα νέα εργαλεία στο πλαίσιο που τους ήταν εξαρχής πιο οικείο και εν γένει πιο προσιτό (Hunting & Davis, 1991). Ωστόσο, τα μικρά δείγματα επιτυχίας στο μεταέλεγχο, αλλά και ο τρόπος που αντιμετώπισαν τα παιδιά παρόμοια έργα στη διάρκεια της παρέμβασης (όπως μπορεί να διαπιστωθεί από τα παραδείγματα που δόθηκαν παραπάνω), αποτελούν ισχυρές ενδείξεις ότι η πραγμάτευση πολλαπλασιαστικών καταστάσεων με σχέσεις πέραν των 1:2, 2:1 είναι μέσα στις δυνατότητες των παιδιών αυτής της ηλικίας. Ταυτόχρονα, διαφαίνεται ότι τα μικρά παιδιά μπορούν να επωφεληθούν από μια παρέμβαση με τα χαρακτηριστικά αυτής που παρουσιάστηκε εδώ. Απαιτείται μακροχρόνια και συστηματική παρέμβαση βασισμένη στις ίδιες αρχές, με πειραματικό σχεδιασμό και μεγαλύτερο δείγμα, για να ελεγχθεί κατά πόσο η επίδραση της παρέμβασης είναι σημαντική και με σταθερά και μακροπρόσθεσμα οφέλη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βαμβακούση, Ξ., & Καλδρυμίδου, Μ. (2018). Το αναλυτικό πρόγραμμα ως εκπαιδευτικό υλικό: το παράδειγμα του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου. Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (Επιμ.). *Πρακτικά 3ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή*: *«Εκπαιδευτικό υλικό Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών: Διαφορετικές χρήσεις, διασταυρούμενες πορείες μάθησης»* (σελ. 302-311), Ρόδος: Εργαστήριο Μαθησιακής Τεχνολογίας και Διδακτικής Μηχανικής του Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ. και Εργαστήριο Φυσικών Επιστημών του Π.Τ.Δ.Ε. του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Ψηφιακή έκδοση, ISBN: 978-960-86791-9-1

Hunting, R. & Davis, G. (1991). *Early fraction learning*. New York: Springer-Verlag

Kornilaki, K., & Nunes, T. (2005). Generalising principles in spite of procedural differences: Children's understanding of division. *Cognitive Development*, *20*, 388-406.

McCrink, K., & Spelke, E. S. (2016). Non-symbolic division in childhood. *Journal of experimental child psychology*, *142*, 66-82.

Mix, K.S., Huttenlocher, J., & Levine, S. (2002). *Quantitative development in infancy and early childhood*. New York: Oxford University Press.

Spinillo, A., & Bryant, P. (1991). Children's proportional judgments: The importance of ''half''. Child Development, 62, 427–440.