ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ – ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΝΗΠΙΑΓΩΓΩΝ

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΣΤΙΣ ΜΙΚΡΕΣ ΗΛΙΚΙΕΣ: Ο ΛΟΓΟΣ ΚΑΙ Η ΑΝΑΛΟΓΙΑ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ

EARLY MULTIPLICATIVE REASONING KINDERGARTENER'S UNDERSTANDINGS OF RATIO AND PROPORTION

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΦΟΙΤΗΤΡΙΑΣ : ΜΑΡΙΑ ΚΑΡΑΚΩΣΤΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ : ΞΑΝΘΗ ΒΑΜΒΑΚΟΥΣΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2020

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια προπτυχιακών σπουδών , στο χώρο το Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, στον τομέα των Επιστημών Αγωγής και πιο συγκεκριμένα στο Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών. Το παρόν έγγραφο αποτελεί προσπάθεια που διεξήχθη από τις 30-10-2018 και στοχεύει στον τομέα της έρευνας.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με αυτό το σημείωμα θα ήθελα να ευχαριστήσω το Νηπιαγωγείο που με φιλοξένησε για να εξυπηρετήσω τους σκοπούς της ερευνητικής μου εργασίας, εκπαιδευτικό προσωπικό, και μαθητές, οι οποίοι με προθυμία δηλώθηκαν ως συμμετέχοντες , προκειμένου να υπάρχουν αυτή τη στιγμή τα δεδομένα τα οποία θα εξεταστούν στην παρούσα εργασία.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τις κυρίες Μαρία Καλδρυμίδου και Αικατερίνη Πλακίτση για το χρόνο που διέθεσαν για την αξιολόγηση της εργασίας, καθώς επίσης και για τις γνώσεις που μου παρείχαν μέσα από τα δικά τους ακαδημαϊκά μαθήματα.

Ένα πολύ μεγάλο ευχαριστώ οφείλω και στην καθηγήτριά μου κ. Ξένια Βαμβακούση, η οποία με αστείρευτη υπομονή και χρόνο για συζητήσεις , με κατεύθυνε στην πραγματοποίηση του παρόντος έργου παρέχοντας μου ατελείωτες πηγές πληροφόρησης για το αντικείμενο της έρευνας και διόρθωση και αξιολόγηση για το υλικό της εργασίας.

Ο χρόνος σας και οι συμβουλές σας ήταν πολύτιμες για μένα.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα τελευταία χρόνια, υπάρχουν ερευνητικά δεδομένα που δείχνουν ότι τα παιδιά της πρωτοσχολικής ηλικίας διαθέτουν πρώιμες ικανότητες επεξεργασίας μαθηματικών και μη μαθηματικών αναλογιών.
Στην παρούσα εργασία, διερευνήσαμε τις πρώιμες ικανότητες των παιδιών της πρωτοσχολικής ηλικίας στην αναγνώριση και επεξεργασία μαθηματικών και μη μαθηματικών αναλογικών σχέσεων. Όσον αφορά τις μη μαθηματικές αναλογίες, χρησιμοποιήθηκαν έργα με μη ποσοτικές, οικείες σχέσεις για τα παιδιά. Όσον αφορά τις μαθηματικές αναλογίες, η εργασία εστίασε στο πως αντιλαμβάνονται τα παιδιά τη σχέση 1:2 όταν αντιμετωπίζουν τυπικά έργα αναλογίας με διαφορετικά είδη ποσοτήτων (διακριτές, συνεχείς και συνδυασμούς τους). Στην έρευνα συμμετείχαν 13 παιδιά του νηπιαγωγείου, τα οποία κλήθηκαν να απαντήσουν και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους σε τέτοια έργα μη μαθηματικών και μαθηματικών αναλογιών και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Σύμφωνα με τα ευρήματα της έρευνας, τα παιδιά είχαν πολύ καλύτερες επιδόσεις στις μη μαθηματικές αναλογίες, σε σχέση με τις μαθηματικές αναλογίες. Επιπλέον, δεν υπήρξε κανένα παιδί που να είχε καλύτερη επίδοση στις μαθηματικές αναλογίες, σε σχέση με τις μαθηματικές αναλογίες. Παρατηρήθηκαν επίσης δι-ατομικές διαφορές, όσον αφορά την επίδοση στα έργα, αλλά και τις επεξηγήσεις των παιδιών. Επιπλέον, παρατηρήθηκαν και ενδο-ατομικές διαφορές, καθώς φάνηκε ότι για όλα τα παιδιά, οι μαθηματικές αναλογίες στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων ήταν το πιο απαιτητικό έργο, με τις λιγότερο συστηματικά σωστές απαντήσεις.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: λόγος, αναλογία, αναλογική σκέψη, σκέψη κατ’αναλογία, διακριτές ποσότητες, συνεχείς ποσότητες, πολλαπλασιαστικές σχέσεις, πρωτο-σχολική ηλικία

ABSTRACT

There is currently an accumulating body of research evidence indicating that young children have early analogical and proportional reasoning competences. In this paper we investigated 13 kindergarten children's competences in recognizing mathematical and non mathematical analogies. The analogical reasoning tasks were based on non-quantitative relations assumed to be familiar to the participating children. The proportional reasoning tasks represented the relation 1:2 varying the type of quantities involved (e.g., discrete or continuous) and also other non-relevant features of the situation (e.g., spatial organization of the objects involved).

The participating children were asked to find the missing term of the analogy or the proportion selecting from a group of alternatives, and also to justify their answer.

Our results showed that children's performance was higher in the analogical reasoning taks, compared to the proportional reasoning tasks. Inter-individual differences were also observed, with respect to children's accuracy of the response, and also to the quality of their explanations. Finally, there were also intra-individual variability, since for all children the proportional reasoning items in the context of discrete quantities were the more challenging tasks, with the less systematically correct responses.

KEY WORDS: ratio, proportion, analogy, analogical reasoning, proportional reasoning, discrete quantity, continuous quantity, half, pre-primary children

Περιεχόμενα

ΛΙΣΤΑ ΕΙΚΟΝΩΝ 7

ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ 8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ 9

1.1Αποσαφήνιση των όρων 9

1.2 Πρώιμες ικανότητες αναλογικής σκέψης 11

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 15

2.1. Ερευνητικά ερωτήματα 15

2.2 Συμμετέχοντες 16

2.3 Ερευνητικά έργα 16

2.4. Διαδικασία 22

2.5. Επεξεργασία των δεδομένων 23

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3:ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 24

3.1 Συνολική επίδοση 24

3.2. Ατομική επίδοση 26

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 :ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ- ΣΥΖΗΤΗΣΗ 37

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 40

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ 42

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α 42

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β 47

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ 48

ΛΙΣΤΑ ΕΙΚΟΝΩΝ

- Εικόνα 1.1: Έργο 1, Δοκιμή 1 **σελ. 17**
- Εικόνα 1.2 : Έργο 1, Δοκιμή 2 **σελ. 17**
- Εικόνα 1.3 : Έργο 1, Δοκιμή 3 **σελ. 18**
- Εικόνα 2.1 : Έργο 2, Δοκιμή 1 **σελ. 18**
- Εικόνα 2.2 : Έργο 2, Δοκιμή 2 **σελ. 19**
- Εικόνα 2.3 : Έργο 2, Δοκιμή 3 **σελ. 19**
- Εικόνα 3.1 : Έργο 3, Δοκιμή 1 **σελ. 20**
- Εικόνα 3.2 : Έργο 3, Δοκιμή 2 **σελ. 20**
- Εικόνα 3.3 : Έργο 3, Δοκιμή 3 **σελ. 20**
- Εικόνα 4.1 : Έργο 4, Δοκιμή 1 **σελ. 21**
- Εικόνα 4.2 : Έργο 4, Δοκιμή 2 **σελ. 21**
- Εικόνα 4.3 : Έργο 4, Δοκιμή 3 **σελ. 22**
- Εικόνα 5: Έντυπο Καταγραφής Ατομικών Απαντήσεων Συμμετεχόντων **σελ. 16**

ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

- ***Πίνακας 1.*** *Καταγραφή σωστών και λανθασμένων απαντήσεων , ανά έργο και ανά παιδί,* **σελ. 25**
- ***Πίνακας 2.*** *Συχνότητα των κατηγοριών εξήγησης ανά έργο και ανά δοκιμή,* **σελ. 28**
- ***Πίνακας 3.*** *Απαντήσεις (σωστή/λανθασμένη) και η κατηγορία εξήγησης ανά παιδί , ανά έργο και ανά δοκιμή,* **σελ. 30**
- ***Πίνακας 4.****Συχνότητα κάθε επιλογής , ανά έργο και ανά δοκιμή,* **σελ. 32**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

1.1Αποσαφήνιση των όρων

Στον κλάδο των μαθηματικών και των επιμέρους μαθησιακών στόχων αυτού του γνωστικού αντικειμένου ο αναλογικός συλλογισμός ή αναλογική σκέψη (proportional reasoning) είναι διάχυτος σε πολλές ενότητες περιεχομένου του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών, πέρα από αυτές στις οποίες αποτελεί ρητό στόχο. Συναντάται λοιπόν μέσα στο περιεχόμενο της ενότητας Αριθμούς και Πράξεις, και σχετίζεται άμεσα με την επεξεργασία των πολλαπλασιαστικών σχέσεων. Η αναλογική σκέψη και διάφορες μορφές της θα αναλυθεί στο θεωρητικό μέρος της εργασίας

Η αναλογική σκέψη είναι ειδική περίπτωση του συλλογισμού κατ'αναλογία (analogical reasoning). Σε τυπικά έργα συλλογισμού κατ'αναλογία, μια σχέση μεταξύ δύο αντικειμένων (με την ευρεία έννοια) Α και Β αναγνωρίζεται και αξιοποιείται για να αναγνωριστεί μια παρόμοια σχέση ανάμεσα σε δύο άλλα αντικείμενα Γ και Δ. Για παράδειγμα, αν Α: χέρι, Β: γάντι, Γ: πόδι, Δ: κάλτσα, τότε η σχέση του Α με το Β είναι παρόμοια με τη σχέση του Γ με το Δ (με τυπικό συμβολισμό: Α:Β :: Γ:Δ).

Σε μια μαθηματική αναλογία, τα Α, Β, Γ, Δ είναι ποσότητες (φυσικές ή αριθμητικές) και η σχέση μεταξύ τους εκφράζεται μέσω του λόγου τους. Για παράδειγμα, η αναλογία 1:2 :: 2:4 σημαίνει ότι η σχέση του 1 με το 2 είναι ίδια με τη σχέση του 2 με το 4, κάτι που αντιστοιχεί στην ισότητα των λόγων 1/2 και 2/4, ή, διαφορετικά στη γνωστή ισοδυναμία των κλασμάτων 1/2 και 2/4. Με άλλα λόγια, η (μαθηματική) αναλογία είναι μια σχέση ισοδυναμίας και, συγκεκριμένα, ισότητας μεταξύ δύο λόγων.

Ένας λόγος μπορεί να εκφράζει μια σχέση μεταξύ ομοειδών ποσοτήτων (π.χ. μεταξύ δύο επιφανειών, ή δύο μηκών) ή μια σχέση μεταξύ ετεροειδών ποσοτήτων (π.χ., ο λόγος μιας απόστασης προς το χρόνο που χρειάστηκε για να διανυθεί η απόσταση).

Στην πρώτη περίπτωση, ο λόγος μπορεί να εκφράζει μια σχέση μέρους-όλου, ή μια σχέση μέρους-μέρους. Ένα παράδειγμα σχέσης Μέρους- Μέρους για σκέψη και ερμηνεία είναι αυτό της εξής κατάστασης: Σε μια τάξη νηπίων 20 ατόμων υπάρχουν 12 κορίτσια και 8 αγόρια. Όσον αφορά τη σχέση Μέρους-Μέρους, αυτή εκφράζεται με δύο λόγους. Από την μια 12 κορίτσια/8 αγόρια (>1), ή 8 αγόρια έναντι (/) 12 κοριτσιών (<1).

Μια δεύτερη μορφή σχέσης είναι αυτή του Μέρους – Όλου. Αυτή εκφράζει τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε ένα σύνολο με ένα μεγαλύτερο το οποίο θα εμπεριέχει ήδη το πρώτο. Αναλυτικότερα, στο παράδειγμα της παραπάνω κατάσταση, έχουμε δύο σχέσεις Μέρους-Όλου, 8 αγόρια/20 άτομα και 12 κορίτσια /20 άτομα. Και στις δυο περιπτώσεις λόγων ο αριθμός είναι <1, γεγονός που δεν πραγματοποιείται στο προηγούμενο είδος λόγων. Φυσικά πάντα σημαντικό και απόλυτο ρόλο λαμβάνει το μέτρο σύγκρισης της αναλογίας , δηλαδή ως προς ποιο σύνολο θέλουμε να μελετήσουμε τους λόγους, είτε όταν μιλάμε για συγκρίσεις είτε όχι

Στη δεύτερη περίπτωση (λόγος ετεροειδών ποσοτήτων),, ο λόγος εκφράζει μια νέα ποσότητα – στο παράδειγμα με το λόγο μιας απόστασης προς το χρόνο που χρειάστηκε για να διανυθεί, η νέα ποσότητα είναι η μέση ταχύτητα του κινούμενου σώματος).

Όσον αφορά την αναλογία γενικότερα, αυτή ορίζεται ως μια συνθήκη, μια κατάσταση κατά την οποία δυο ποσότητες ή δυο μεταβλητές συσχετίζονται με γραμμικό τρόπο στον οποίο προσφέρονται πληροφορίες που επιτρέπουν να γίνει αντιληπτή η αναλογικότητα τους (Lamon,2006 όπως αναφέρουν οι Van de Walle, J., Karp, Bay-Williams (2017)).

Το να οριστεί επακριβώς η αναλογική σκέψη δεν είναι απλό. Σίγουρα, η αναλογική σκέψη δεν περιορίζεται στη συμπλήρωση ενός λόγου προκειμένου να επιλυθεί κάποιο μαθηματικό πρόβλημα, όπως συμβαίνει συχνά σε προβλήματα αναλογίας του τύπου «ελλείπουσας τιμής» που συναντούν τα παιδιά στα σχολικά μαθηματικά. Πρόκειται για τα γνωστά προβλήματα που μπορούν να επιλυθούν με την «απλή μέθοδο των τριών», στα οποία δίνονται τρεις από τους τέσσερις όρους μιας αναλογίας και ζητείται ο τέταρτος. Για παράδειγμα, ένα τέτοιου είδους πρόβλημα μπορεί να είναι η εξής κατάσταση. «Έχω 2 μήλα που κοστίζουν 1 ευρώ. Αν θέλω να αγοράσω 4 μήλα, πόσα χρήματα θα χρειαστώ;» Σε αυτό το πρόβλημα φαίνεται η σχέση των δυο ειδών (μήλα και χρήματα) και συνίσταται η μέθοδος των τριών ως μορφή επίλυσης του προβλήματος, χωρίς απαραίτητα να διεγείρεται η ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης. Η μηχανιστική διαχείριση της διδασκαλίας των αναλογιών δημιουργεί μια ποικιλία προβληματικών θεμάτων για την αναλογική σκέψη, μιας και αυτή, είναι σύμφυτη με πολύ σημαντικές έννοιες όπως η ομοιότητα, η σχετική αύξηση και μέγεθος, μεγέθυνση/σμίκρυνση, αλλαγή κλίμακας, σταθερός ρυθμός μεταβολής , κυρίως σε θέματα φυσικών επιστημών, κλίση, ταχύτητα, ρυθμοί, ποσοστά, τριγωνομετρικούς λόγοι, πιθανότητες, σχετική συχνότητα, πυκνότητα, αλλά και αντιστρόφως ανάλογες ποσότητες .Άλλωστε δεν είναι τυχαίο πως από τον ενήλικο πληθυσμό ποσοστό άνω του 50% δεν σκέπτεται αναλογικά (Lamon,2006 όπως αναφέρουν οι Van de Walle, J., Karp, Bay-Williams (2017)).

Η αναλογική σκέψη βασίζεται, κατ’αρχήν, στην αναγνώριση και το συλλογισμό για πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων και, επιπλέον, στην αναγνώριση σχέσεων ισοδυναμίας μεταξύ των λόγων. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες μια αναλογία μπορεί να προσεγγιστεί προσθετικά (Van Dooren, Vamvakoussi, & Verschaffel, 2018).. Στο παράδειγμα με τα μήλα που αναφέρθηκε παραπάνω, μια τέτοια προσέγγιση βασίζεται στην ανίχνευση της προσθετικής σχέσης μεταξύ των ομοειδών ποσοτήτων των μήλων («τα 4 μήλα είναι 2 μήλα κι άλλα δύο μήλα) και η μεταφορά αυτής της σχέσης στις ομοειδείς ποσότητες των χρημάτων («τα 2 μήλα αντιστοιχούν σε 1 ευρώ, Άλλα 2 μήλα αντιστοιχούν σε άλλο ένα ευρώ. Το συνολικό κόστος για τα 4 μήλα είναι 2 συν 2 ευρώ»). Ο συλλογιστική αυτή, που αξιοποιεί προσθετικές σχέσεις μεταξύ ομοειδών ποσοτήτων, καταλήγει σε σωστό αποτέλεσμα. Επιπλέον, αποτελεί μια από τις πρώτες στρατηγικές των παιδιών στην αντιμετώπιση παρόμοιων προβλημάτων. Ωστόσο, η ανίχνευση προσθετικών σχέσεων σε μια κατάσταση αναλογίας, μπορεί να οδηγήσει σε λάθη. Για παράδειγμα, στο ίδιο πρόβλημα με τα μήλα, μια λανθασμένη προσέγγιση ξεκινά με την εστίαση στην προσθετική σχέση μεταξύ των μήλων («τα 4 μήλα είναι 2 περισσότερα από τα 2 μήλα») και μεταφέρει αυτή τη σχέση στα χρήματα ως εξής: «Το κόστος για τα 4 μήλα είναι 2 περισσότερα ευρώ».

Για τα παιδιά η ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης επιτυγχάνεται μέσω των δραστηριοτήτων και των εμπειριών τους αναδυόμενες από καταστάσεις σύγκρισης λόγων και εξέτασης αυτής της ισοδυναμίας. Ζητούμενο αυτής της διαδικασίας είναι έχοντας λύσει μια πληθώρα προβλημάτων εννοιολογικού και διαδικαστικού χαρακτήρα να μάθουν να εφαρμόζουν την συλλογιστική πορεία της αναλογικής διαδικασίας και όχι να τυποποιούν και να λειτουργούν μηχανιστικά απέναντί της. Η υπερβολική έμφαση σε προσθετικές σχέσεις στα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης μπορεί να λειτουργήσει ανασταλτικά στην ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης των παιδιών (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018). Μια εναλλακτική είναι να αξιοποιηθούν στην εκπαίδευση οι πρώιμες ικανότητες για αναλογική σκέψη που, όπως θα συζητηθεί στην επόμενη ενότητα, είναι διαθέσιμες υπό συνθήκες από πολύ μικρή ηλικία.

1.2 Πρώιμες ικανότητες αναλογικής σκέψης

Με την πάροδο των χρόνων πολλά έχουν ειπωθεί γύρω από την αναλογική σκέψη και την σκέψη κατ’ αναλογία σχετικά με τις ηλικίες της προσχολικής και σχολικής εκπαίδευσης. Μια άποψη την οποία πολλοί ερευνητές ενστερνίστηκαν ήταν αυτή που είχε πρωτεργάτη της τον Piaget. Μέσα από μια σειρά πειραμάτων που σχετίζονταν με την διαχείριση σχέσεων ισοδυναμίας και διάταξης των λόγων, παρατηρήθηκε από τον Piaget ότι οι μαθητές πριν από την ηλικία των 11 ετών, δεν έχουν την ικανότητα της αναλογικής σκέψης. Αυτό το πόρισμα προκύπτει από τις ανεπιτυχείς προσπάθειες των παιδιών να αναλύσουν σχέσεις ανάμεσα στις αναλογίες που τους δίνονταν κατά την έρευνα., βασιζόμενα μονάχα στις γνώσεις που είχαν ήδη από την πρόσθεση (Βράκα, 2017, Πήττα 2019).

Ωστόσο, όπως επισημαίνουν οι Πήττα, Καλδρυμίδου και Βαμβακούση (υπό δημοσίευση), υπάρχουν πολλά ερευνητικά δεδομένα που υποδεικνύουν ότι από πολύ μικρή ηλικία, υπάρχουν πρώιμες ικανότητες σκέψης κατ’αναλογία, πολλαπλασιαστικής, αλλά και αναλογικής σκέψης.

Αναλυτικότερα, όσον αφορά τις πρώιμες ικανότητες κατ’ αναλογίαν σκέψης, όπως φαίνεται από έρευνες της Goswami και των συνεργατών της, αυτές διακρίνονται ήδη από την ηλικία των 4 ετών. Ένα μη μαθηματικό παράδειγμα αναλογίας που έχει αντίκτυπο σε αυτές τις ηλικίες (4-5 ετών) υποστηρίζεται μέσα από μια έρευνα της Goswami και Brown (1990). Οι ερευνητές αυτοί χρησιμοποίησαν κλασσικά αναλογικά έργα προκειμένου να εξετάσουν την αναγνώριση αναλογικών σχέσεων σε αυτές τις ηλικίες. Πιο συγκεκριμένα, στην μελέτη αυτή υπήρχε μια σειρά από εικόνες στη μορφή Α:Β::Γ:Δ με σχετικές θεματικές . Για παράδειγμα, σε ένα έργο της μορφής Πουλί: Φωλιά , Σκύλος: (?), το σπίτι σκύλου δίνονταν ως επιλογή Δ της παραπάνω αναλογίας , ανάμεσα σε άλλες όπως κόκκαλο, γάτα και κουτάβι και ο μαθητής έπρεπε να επιλέξει το κατάλληλο για να ολοκληρώσει την αναλογία. Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας από τους μαθητές ηλικίας 3 ετών που ολοκλήρωσαν το πείραμα έδειξαν ότι για τους μαθητές 3 ετών, το 52% των αναλογίων λύθηκε με επιτυχία. Το αντίστοιχο ποσοστό, για τους μαθητές 4 ετών ήταν 89%, ενώ για τους μαθητές ηλικίας 6 ετών, το 99% των έργων επιλύθηκαν με επιτυχία.

Παρόμοια, υπάρχουν ευρήματα που δείχνουν ότι, αντίθετα με την άποψη του Piaget, τα μικρά παιδιά διαθέτουν πρώιμες ικανότητες πολλαπλασιαστικής και αναλογικής σκέψης, όταν η κατάσταση που αντιμετωπίζουν αφορά ποσότητες και όχι αριθμούς. Η Resnick και οι συνεργάτες της υποστηρίζουν ότι η ανάπτυξη της αναλογίας και των λόγων είναι μια ακολουθία στην οποία παιδιά αναρωτιούνται πρώτα πρωτοποσοτικά (χωρίς αριθμούς) για καταστάσεις αναλογικές και ύστερα για αναλογίες και λόγους, εκφράζοντας αυτές τις σχέσεις με ακριβείς μαθηματικές φόρμες αναπαράστασης και συλλογισμού (Singer, Kohn, Resnick, 1997). Στην περίπτωση των μικρών παιδιών , προκειμένου να γίνει αντιληπτή η αναλογία πρέπει να γίνει κατανοητός ο συσχετισμός των μεταξύ λόγων , καθώς επίσης και ο λόγος σε σχέση με τα αντίστοιχα μεγέθη/ποσότητες. Σε αυτό το σημείο δεν μπορεί να αγνοηθεί η σημαντικότατη διαίσθηση των μικρών παιδιών απέναντι σε καταστάσεις λόγων και πυκνοτήτων με πιθανότατα αντιληπτική επεξεργασία δεδομένων (Resnick & Greeno,1990, όπως αναφέρεται σε Resnick, Singer & Kohn (1997)).Σε άρθρο τους , οι Resnick , Singer & Kohn(1997) υποστηρίζουν πως το πρωτοποσοτικό σχήμα δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να σκεφτούν σε σχέση με τις αναλογίες ,οι οποίες προκύπτουν μέσα από ποσότητες φυσικών αντικειμένων, συνδυασμών, αυξήσεων και μειώσεων, και συγκρίσεων. Αυτή η πρωτοποσοτικοποίηση επιτρέπει στους μαθητές να σκεφτούν χωρίς την χρήση αριθμητικών εργαλείων. Επισημαίνεται επίσης πως ήδη από την ηλικία των 2 ετών, τα παιδιά μπορούν να ξεχωρίσουν σχετικά μεγέθη. Για παράδειγμα, μπορούν να αντιληφθούν ότι ένα μπλουζάκι κοντομάνικο μπορεί να είναι μικρό για αυτά, αλλά μεγάλο για μια κούκλα.

Οι Πήττα και συνεργάτες (υπό δημοσίευση), αναφέρονται σε έρευνες οι οποίες αναδεικνύουν πρώιμες ικανότητες στην αναγνώριση πολλαπλασιαστικών/αναλογικών σχέσεων. Φαίνεται ότι τα μικρά παιδιά διακρίνουν μεταβολές στο λόγο μεταξύ δύο ποσοτήτων και αναγνωρίζουν αναλογικές σχέσεις σε αντιληπτικό επίπεδο. Παιδιά 6 ετών, αν τους δοθούν αρκετά παραδείγματα μιας συγκεκριμένης σχέσης μέρους-όλου σε σχήματα με ένα σκιασμένο μέρος, τότε μπορούν να επιλέξουν, ανάμεσα σε άλλα, ένα μοντέλο που αναπαριστά την ίδια σχέση (Mix, Huttenlocher & Levine, 2002, όπως αναφέρεται στο Πήττα κ.ά., υπό δημοσίευση).

Επίσης, οι McCrick & Spelke (2016, όπως αναφέρεται στο Πήττα κ.ά., υπό δημοσίευση) έδειξαν ότι μαθητές 6 ετών μπορούν , αν τους δοθούν πολλά παραδείγματα μιας συγκεκριμένης σχέσης μέρους- όλου , απεικονιζόμενα σε σχήματα και με την αντίστοιχη γραμμοσκίαση , τότε μπορούν αν επιλέξουν μια άλλη, διαφορετική απεικόνιση, της ίδια σχέσης με την αναφερόμενη. Έτσι λοιπόν φαίνεται πως, αντίθετα με όσα υποστήριζε ο Piaget, τα μικρά παιδιά έχουν πράγματι ικανότητες πολλαπλασιαστικής και εν συνεχεία αναλογικής σκέψης. Η συχνότητα και η ποιότητα των ευκαιριών των μαθητών να ασχοληθούν με προβλήματα αναλογικής σκέψης λαμβάνουν μείζονά ρόλο στην ανάπτυξη και καλλιέργεια αυτών των ικανοτήτων.

Οι πρώιμες ικανότητες δεν είναι γενικές: αναδύονται υπό συνθήκες. Ένας παράγοντας που διαφοροποιεί τη δυσκολία στην αναγνώριση πολλαπλασιαστικών σχέσεων είναι το είδος των εμπλεκόμενων ποσοτήτων.

Σε πολλές έρευνες που πραγματεύονται διεργασίες αναλογικής σκέψης διακρίνουμε δυο βασικά είδη ποσοτήτων. Οι ποσότητες αυτές διαφέρουν ως προς τη φύση τους και είναι οι συνεχείς και οι διακριτές ποσότητες, αντίστοιχα.

Οι Singer-Freeman & Goswami (2001) εξέτασαν τις επιδόσεις των παιδιών σε έργα με διακριτές ποσότητες (κομμάτια σοκολάτας) και συνεχείς ποσότητες (επιφάνειες, όγκους).Με βάση αυτή τη διάκριση, οι ερευνήτριες αυτές πραγματεύονται μια κατηγοριοποίηση, αυτή των ομοιογενών και ανομοιογενών προβλημάτων. Ομοιογενή προβλήματα χαρακτηρίζονται οι καταστάσεις κατά τις οποίες συγκρίνονται συμβολικά και αριθμητικά δυο ή περισσότερες ποσότητες που ανήκουν στο ίδιο είδος ποσοτήτων, (συνεχής-συνεχής ή διακριτή- διακριτή) έναντι των ανομοιογενών καταστάσεων που αποτελούν προβλήματα ερμηνείας και ποσοτικοποίησης διαφορετικών ειδών ποσοτήτων (συνεχής-διακριτή). Οι Singer-Freeman και Goswami(2001) καταλήγουν στο ότι το ποσοστό επιτυχίας των μαθητών σε προβλήματα ανομοιογενών ποσοτήτων ήταν μεγαλύτερο σε σχέση με τα ομοιογενή.

Ένα δεύτερο πόρισμα τους είναι ότι παιδιά μικρών ηλικιών εμφανίζουν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας σε δοκιμασίες που εμπλέκονται συνεχείς ποσότητες, έναντι των διακριτών. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρεται πως η έργα αναλογίας στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων φαίνεται να δυσκολεύουν αρκετά τα παιδιά των ηλικιών 3-6 ετών, με ποσοστά μόλις 41% επιτυχία στις διακριτές (σοκολάτες) , έναντι 76% επιτυχία στις συνεχείς (πίτσα) ποσότητες. Κατ΄ αυτόν τον τρόπο υποστηρίζεται πως προβλήματα διακριτών ποσοτήτων είναι πιο δύσκολα για τα παιδιά της ηλικίας 4-6 ετών.

Ένας άλλος παράγοντας που διαφοροποιεί τη δυσκολία της αναγνώρισης πολλαπλασιαστικών αναλογικών σχέσεων είναι η ίδια η πολλαπλασιαστική σχέση. Πράγματι, όσον αφορά την αντιληπτική αναγνώριση σχέσεων έχει βρεθεί επανειλημμένα ότι η σχέση 1:2 είναι η πρώτη και πιο θεμελιώδης σχέση που διαχειρίζονται τα παιδιά (Πήττα κ.ά., υπό δημοσίευση)..

Συνοψίζοντας, υπάρχουν ευρήματα που δείχνουν ότι υπάρχουν πρώιμες ικανότητες σκέψης κατ’αναλογία. Επίσης, υπάρχουν ευρήματα που δείχνουν ότι τα παιδιά αναγνωρίζουν πολλαπλασιαστικές/αναλογικές σχέσεις με αντιληπτικό τρόπο. Οι ικανότητες αυτές αναδύονται υπό συνθήκες, με το είδος των ποσοτήτων (διακριτές/συνεχείς) να παίζει σημαντικό ρόλο. Επιπλέον, η σχέση 1:2 έχει προτεραιότητα έναντι άλλων σχέσεων. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι υπάρχουν δι-ατομικές διαφορές στις πρώιμες αυτές ικανότητες (Πήττα κ.ά., υπό δημοσίευση).

Επιπλέον, φαίνεται ότι οι ικανότητες σκέψης κατ'αναλογία και αναλογικής σκέψης συσχετίζονται,

Τέλος, επισημαίνουμε ότι υπάρχουν ενδείξεις σύμφωνα με τις οποίες η αναλογική σκέψη και η σκέψη κατ' αναλογία σχετίζονται, χωρίς ωστόσο να είναι ξεκάθαρο κατά πόσο ένα από τα δύο είδη σκέψης προηγείται (Ham & Gunderson, 2019).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

2.1. Ερευνητικά ερωτήματα

Με την εμπειρική αυτή μελέτη διερευνήθηκαν οι πρώιμες ικανότητες των παιδιών της πρωτοσχολικής ηλικίας στην αναγνώριση και επεξεργασία μαθηματικών και μη μαθηματικών αναλογικών σχέσεων.

Τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν ήταν τα εξής:

α) Μπορούν τα παιδιά αυτής της ηλικίας να πραγματευτούν (δηλ. να αναγνωρίσουν και να αιτιολογήσουν) α) μη μαθηματικές και β) μαθηματικές αναλογικές σχέσεις; Υπάρχει διαφορά ανάμεσα στο (α) και το (β); Υπάρχουν δι-ατομικές διαφορές;

β) Κατά πόσο είναι τα παιδιά αυτής της ηλικίας συνεπή είναι στην αναγνώριση της ίδιας ποσοτικής σχέσης σε διαφορετικά πλαίσια (υπάρχουν ενδο-ατομικές διαφορές); Ειδικότερα, τι επίδραση έχει το είδος το είδος των εμπλεκόμενων ποσοτήτων (διακριτές / συνεχείς) στην επίδοσή τους σε έργα μαθηματικής αναλογίας;

γ) Με ποιες στρατηγικές αντιμετωπίζουν τα παιδιά αυτής της ηλικίας έργα αναλογίας;

Με βάση τη βιβλιογραφική ανασκόπηση που προηγήθηκε, αναμέναμε ότι τα παιδιά θα αναγνώριζαν μαθηματικές και μη μαθηματικές αναλογικές σχέσεις, αλλά ότι θα υπήρχαν δι-ατομικές διαφορές. Επιπλέον αναμέναμε ότι το πλαίσιο αναπαράστασης των μαθηματικών αναλογιών θα επηρέαζε αποκρίσεις των παιδιών (ενδο-ατομικές διαφορές). Πιο συγκεκριμένα, αναμέναμε ότι τα παιδιά θα δυσκολεύονταν περισσότερο στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων και ότι θα επηρεάζονταν από μεταβολές σε επιφανειακά χαρακτηριστικά των αναπαραστάσεων. Δεν είχαμε συγκεκριμένες προβλέψεις για τη σχέση ανάμεσα στην επίδοση στις μαθηματικές και μη μαθηματικές αναλογίες, καθώς και τις στρατηγικές των παιδιών.

Η έρευνα είναι μια μελέτη περίπτωσης που διεξήχθη με ατομικές, βασισμένες σε έργα συνεντεύξεις. Οι συνεντεύξεις μαγνητοφωνήθηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν για τις ανάγκες της καταγραφής και ανάλυσης των δεδομένων. Στη διάρκεια των συνεντεύξεων χρησιμοποιήθηκε ένα έντυπο καταγραφής των επιλογών που κλήθηκαν να κάνουν τα παιδιά στα διάφορα έργα, ανά δοκιμασία. Στην Εικόνα 5παρουσιάζεται η μορφή αυτού του εντύπου, για το πρώτο έργο. Επίσης, κρατήθηκαν σημειώσεις πεδίου κατά τη διάρκεια ή αμέσως μετά τη κάθε συνέντευξη.

ΕΝΤΥΠΟ ΚΑΤΑΓΡΑΦΗΣ ΑΤΟΜΙΚΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

ΟΝΟΜΑ ΠΑΙΔΙΟΥ: **ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:**

<u>ΕΡΓΟ 1</u>

ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ 1.1
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 1 2 3 4

ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ 1.2
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 1 2 3 4

ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ 1.3
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 1 2 3 4

Εικόνα 5. *Έντυπο Καταγραφής Ατομικών Απαντήσεων Συμμετεχόντων*

2.2 Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 13 παιδιά , ηλικίας τεσσάρων (4) έως έξι (6) ετών. Από τα 13 αυτά άτομα, τα πέντε (5) ήταν προνήπια και τα υπόλοιπα οκτώ (8) νήπια. Το συγκεκριμένο δείγμα αποτελείται από μαθητές που φοιτούν όλοι μαζί στην ίδια τάξη του Νηπιαγωγείου που έλαβε μέρος στην διαδικασία της έρευνας. Επισημαίνεται πως μεταξύ των μαθητών που επιλέχθηκαν ένα (1) μονάχα προνήπιο ήταν από άλλη χώρα χωρίς αυτό να αποτελεί πρόβλημα στην κατανόηση των ζητούμενων και την διατύπωση των απαντήσεων. Τέλος, τα 13 παιδιά επιλέχθηκαν από την εκπαιδευτικό της τάξης με κριτήριο να μην αντιμετωπίζουν κάποια μαθησιακή δυσκολία.

Στα επόμενα, τα παιδιά θα αναφέρονται με αριθμητικούς κωδικούς βάσει της σειράς επιλογής τους από την υπεύθυνη νηπιαγωγό του τμήματος.

2.3 Ερευνητικά έργα

Για τις ανάγκες της έρευνας σχεδιάστηκαν 4 έργα (στο εξής Ε1, Ε2, Ε3 και Ε4), καθένα από τα οποία είχε 3 δοκιμές.

Όλα τα έργα ήταν διαμορφωμένα ως τυπικά έργα αναλογίας (Α:Β :: Γ:Δ, με άλλα λόγια «η σχέση του Α με το Β είναι ίδια με τη σχέση του Γ με το Δ»), στα οποία δίνονται τα Α, Β, Γ και ζητείται το Δ. Τα έργα ήταν κλειστού τύπου, με τέσσερις επιλογές για το Δ, από τις οποίες τα παιδιά καλούνταν να επιλέξουν τη μία. Η ακριβής διατύπωση ήταν ως εξής:« Αυτό (κάρτα Α).. ταιριάζει με αυτό (κάρτα Β). (1η σχέση μεταξύ δεδομένων)». « Αυτό (κάρτα Γ) με ποιο από αυτά ταιριάζει; (δίνονταν από κάτω οι επιλογές) (ζητούμενο)». Τα παιδιά μου έδειχναν την επιλογή τους και ρωτούσα «Γιατί;», με προσοχή ώστε ο τόνος να μην τους προκαλεί αμφιβολία για το αν εργάστηκαν σωστά.

Το υλικό που χρησιμοποιήθηκε για την διεξαγωγή της έρευνας, αποτελούνταν από πλαστικοποιημένα σχήματα και σχέδια που χρησιμοποιούνταν ανάλογα με το έργο και το είδος της ποσότητας που εξετάζονταν.

Όσον αφορά τα έργα, το Ε1 αφορούσε απλές, μη μαθηματικές, αναλογίες με σχέσεις οικείες στα παιδιά. Πιο συγκεκριμένα, εξετάστηκε η ικανότητα των παιδιών να επεξεργάζονται απλές αναλογίες με μη μαθηματικές σχέσεις που θεωρήθηκαν οικείες σε αυτά. Το Έργο 1 χρησιμοποιήθηκε για δυο λόγους: Αφενός, ως εισαγωγική δραστηριότητα, ώστε να εξοικειωθούν τα παιδιά με τον τύπο των έργων σε ένα πλαίσιο ενδεχομένως πιο οικείο σε αυτά. Αφετέρου, για να εξεταστεί και να συγκριθεί η ανταπόκρισή τους σε μη μαθηματικά έργα κατ' αναλογία σκέψης, με μαθηματικά έργα, όπως είναι αυτά στα οποία ζητείται μια αναλογική σχέση μεταξύ ποσοτήτων (Ε2, Ε3, Ε4).

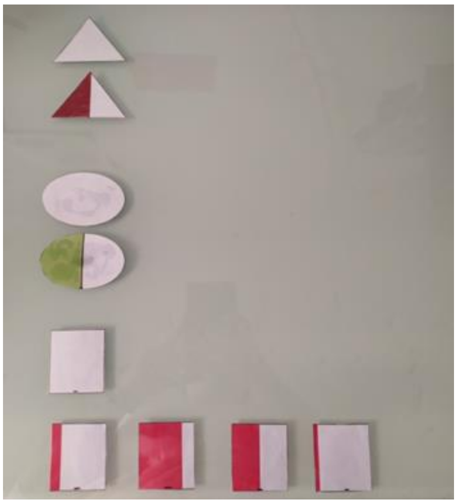
Στις Εικόνες 1.1,1.2, και 1.3, αντίστοιχα, εμφανίζεται το υλικό που χρησιμοποιήθηκε στις τρεις δοκιμές του Ε1 (Ε1.1, Ε1.2 και Ε1.3). Όπως φαίνεται στις Εικόνες αυτές, στο Ε1 χρησιμοποιήθηκαν πλαστικοποιημένες εικόνες από ζώα, Μέσα Μαζικής Μεταφοράς, μέρη του σώματος και καθημερινά αντικείμενα. Ο κωδικός της κάθε επιλογής αντιστοιχεί στη σειρά με την οποία εμφανίζεται στην αντίστοιχη εικόνα και παρουσιάζεται πιο αναλυτικά στο Παράρτημα Α.

Εικόνα 1.1. Έργο 1, Δοκιμή 1

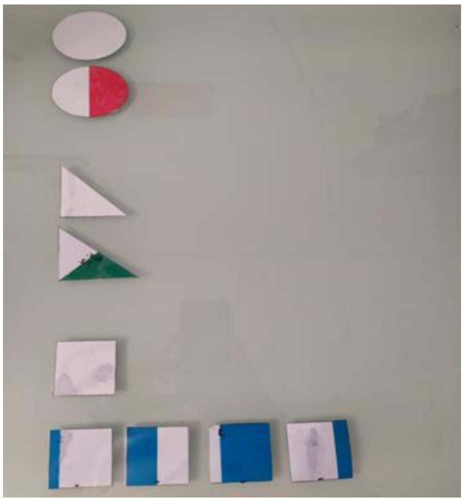
Εικόνα 1.2: Έργο 1, Δοκιμή 1

Εικόνα 1.3: Έργο 1, Δοκιμή 3.

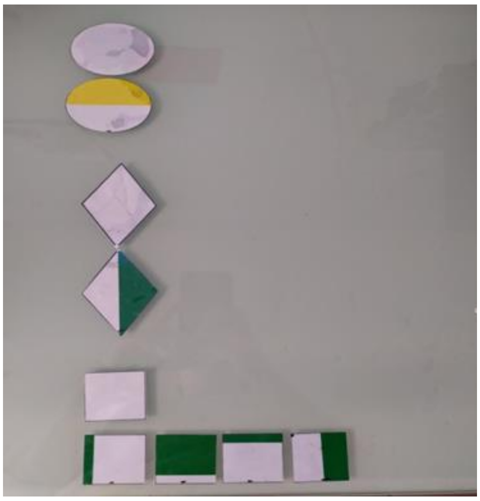
Το Ε2 εξέταζε την αναγνώριση της σχέσης 1:2 όταν αναπαρίσταται με συνεχείς ποσότητες και, συγκεκριμένα, με το μοντέλο του εμβαδού. Οι δοκιμές του Ε2 παρουσιάζονται στις Εικόνες 2.1, 2.2 και 2.3, αντίστοιχα. Όπως φαίνεται από τις εικόνες αυτές, οι σχέσεις αναπαραστάθηκαν με γεωμετρικά σχήματα, μέρος των επιφάνειας των οποίων καλύπτονταν με διάφορα χρώματα.



Εικόνα 2.1: Έργο 2, Δοκιμή 1.



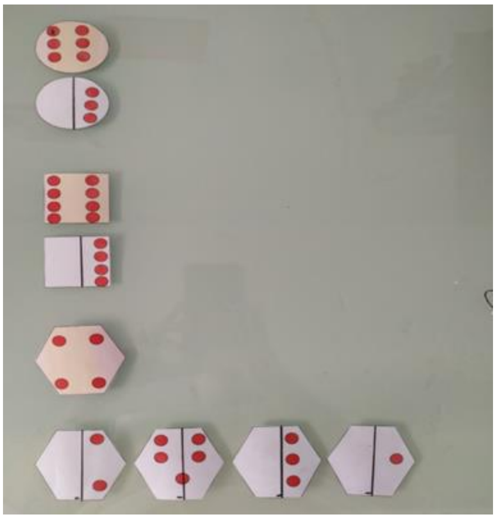
Εικόνα 2.2: Έργο 2, Δοκιμή 2.



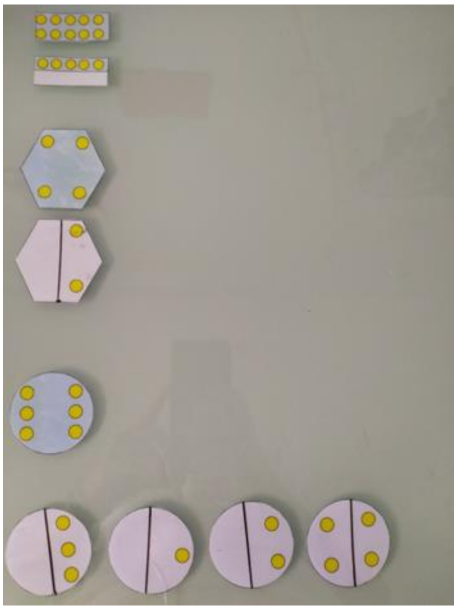
Εικόνα 2.3:Έργο 2, Δοκιμή 3.

Το επίπεδο δυσκολίας των επιμέρους δοκιμασιών αυτού του έργου καθορίστηκε από τη θέση των γραμμοσκιασμένων χωρίων στα δεδομένο και στις εναλλακτικές που δόθηκαν στα παιδιά: Ίδια θέση στα δεδομένα, ίδια θέση στη σωστή εναλλακτική (Ε2.1), ίδια θέση στα δεδομένα, διαφορετική θέση στη σωστή εναλλακτική (Ε2.2) και διαφορετική θέση στα δεδομένα, διαφορετική θέση στη σωστή εναλλακτική (Ε2.3).

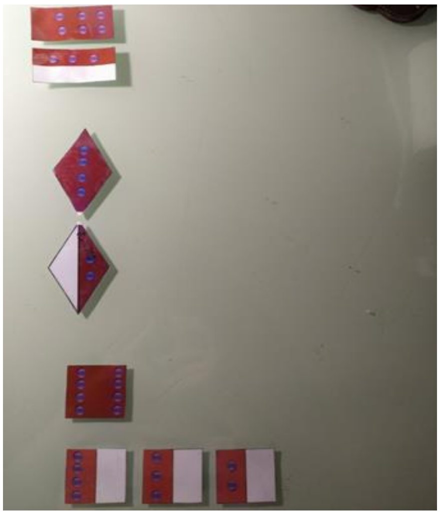
Το Έργο 3 εξέτασε την αναγνώριση σχέσεων σε ένα πλαίσιο συνύπαρξης συνεχών και διακριτών ποσοτήτων. Το έργο αυτό επιτρέπει την επεξεργασία των σχέσεων με δυο βασικά εργαλεία που είχαν στα χέρια τους οι συμμετέχοντες: Ένα αυτό της καταμέτρησης και ένα αυτό των αξόνων συμμετρίας. Οι Εικόνες 3.1, 3.2 και 3.3 παρουσιάζουν το υλικό που χρησιμοποιήθηκε στις τρεις δοκιμασίες του Ε3. Όπως φαίνεται στις εικόνες αυτές, το χειραπτικό υλικό με το οποίο εργάστηκαν τα παιδιά αποτελούνταν από σχήματα με ορατούς άξονες συμμετρίας και χρωματισμένες κουκκίδες στο εσωτερικό τους.



Εικόνα 3.1:Έργο 3, Δοκιμή 1.



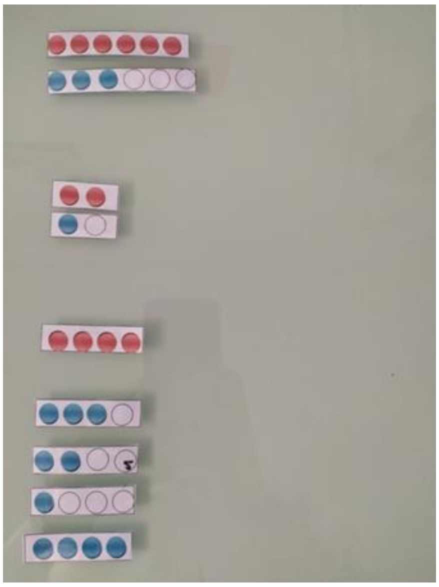
Εικόνα 3.2: Έργο 3, Δοκιμή 2.



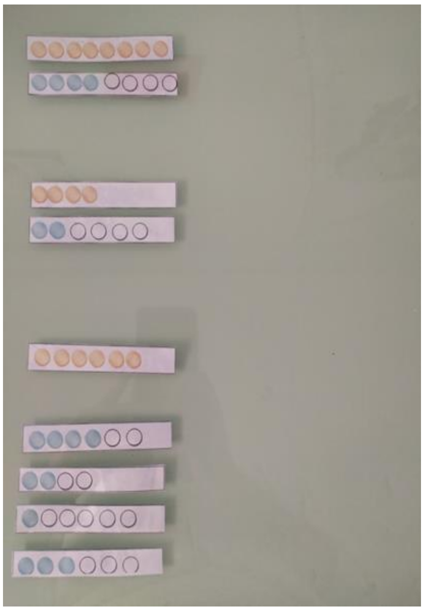
Εικόνα 3.3: Έργο 3, Δοκιμή 3.

Το Έργο 3 εξέταζε αν το επίπεδο δυσκολίας των μαθηματικών αναλογικών σχέσεων θα αυξάνονταν με τη συμβολή δυο διαφορετικών ειδών ποσοτήτων, ή θα διευκόλυνε τα παιδιά. Στόχος ήταν να παρατηρήσουμε τι μαθηματικά εργαλεία θα χρησιμοποιούνταν προκειμένου να επιλέξουν απάντηση.

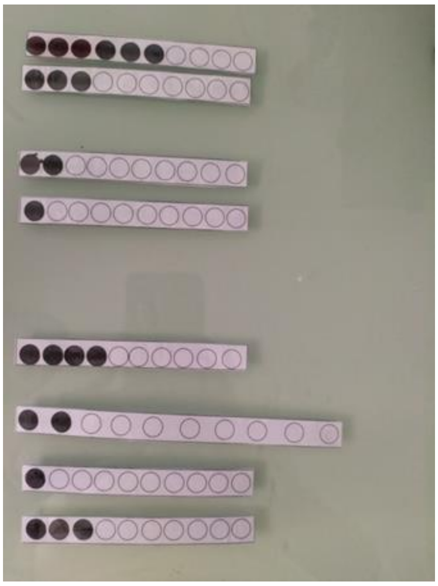
Το Έργο 4 τίθεται στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων. Οι σχέσεις αναπαραστάθηκαν με το μοντέλο συνόλου, όπως φαίνεται στις Εικόνες. 4.1, 4.2, .και 4.3 αντίστοιχα.



Εικόνα 4.1: Έργο 4, Δοκιμή 1.



Εικόνα 4.2: Έργο 4, Δοκιμή 2



Εικόνα 4.3: Έργο 4, Δοκιμή 3.

Όπως φαίνεται στις εικόνες αυτές, στην πρώτη δοκιμασία (Ε4.1), το συνολικό πλήθος των κουκκίδων σε κάθε λωρίδα παραμένει σταθερό και η σχέση αναπαρίσταται ως σχέση μέρους-μέρους ανάμεσα στις χρωματιστές και τις λευκές κουκκίδες. Στην δεύτερη δοκιμασία (Ε4.1) , το πλήθος των κουκκίδων στις εναλλακτικές δεν παραμένει σταθερό και η αναγνώριση της σχέσης προϋποθέτει τη σύγκριση μεταξύ των χρωματισμένων κουκκίδων των δύο λωρίδων. Τέλος, στην τρίτη δοκιμασία (Ε4.3), το πλήθος των κουκκίδων παραμένει σταθερό, αλλά το μήκος των λωρίδων μεταβάλλεται, και η σωστή επιλογή αντιστοιχεί στην εναλλακτική με αραιωμένο το πλήθος των κουκίδων. Με αυτό τον τρόπο , θέλαμε να εξετάσουμε εάν τα παιδιά θα επικεντρωθούν στο πλήθος, ή θα το αγνοήσουν και θα επικεντρωθούν σε άλλα χαρακτηριστικά ομοιότητας μεταξύ των δεδομένων και των ζητούμενων, καθώς και των μεταξύ τους επιλογών.

2.4. Διαδικασία

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο χώρο ενός Νηπιαγωγείου, σε μια ειδική αίθουσα (αίθουσα σχολικού συμβούλου). Αρχικά εξηγούσα τη διαδικασία στα παιδιά και τους λόγους που ήταν μαζί μου εκείνη τη στιγμή και με το που βεβαιωνόμουν ότι δεν διακατέχονταν από άγχος, τους επέτρεπα να πατήσουν το «μαγικό κουμπί» για να ξεκινήσει η μαγνητοφώνηση .Το κάθε παιδί προσεγγιστικά απασχολήθηκε περίπου 13- 15 λεπτά.

Με την παράθεση των καρτών στο τραπέζι και την προαναφερθείσα διατύπωση, τα παιδιά μου απαντούσαν (ο διαχωρισμός των απαντήσεων των παιδιών σε κατηγορίες θα μελετηθεί εκτενέστερα στην πορεία) και εγώ μάζευα τις κάρτες της δοκιμασίας , τις τοποθετούσα στο κουτί και επαναλάμβανα με τα ίδια λόγια την επόμενη δοκιμασία.

Ταυτόχρονα δίπλα μου είχα ένα αυτοσχέδιο φυλλάδιο στο οποίο ανέγραφα τον αριθμό σειράς τους και το αν ανήκουν στην κατηγορία προνήπιο ή νήπιο , ημερομηνία, παρατηρήσεις κατά τη διεργασία των παιδιών και την απάντηση που επέλεξαν , μιας και μέσω στην μαγνητοφώνησης αυτές οι πληροφορίες τα χανόταν.

Με τη λήξη της διαδικασίας , ευχαριστούσα πολύ τα παιδιά για την βοήθεια τους και μαζί κλείναμε το κουτί, ξαναπατούσαμε το «μαγικό κουτί» και τα συνόδευα στην αίθουσα.

2.5. Επεξεργασία των δεδομένων

Κατά τη πραγματοποίηση της έρευνας συγκεντρώθηκαν δεδομένα μέσω ατομικών, κλινικών συνεντεύξεων, των σημειώσεων πεδίου, και του εντύπου καταγραφής των επιλογών των παιδιών. Οι συνεντεύξεις απομαγνητοφωνήθηκαν.

Τα δεδομένα εξετάστηκαν ως προς:

1) Την επίδοση των παιδιών στα έργα (σωστές και λάθος απαντήσεις)
2) Τις επιλογές που έκαναν τα παιδιά, όταν απάντησαν λανθασμένα.
3) Την αιτιολόγηση των απαντήσεων τους (διαχωρισμός σε κατηγορίες)
4) Τις στρατηγικές που ακολούθησαν

Για το 3, οι αιτιολογήσεις καταγράφτηκαν, εξετάστηκαν ενδελεχώς και ομαδοποιήθηκαν σε κατηγορίες που περιγράφονται λεπτομερώς στην ενότητα 4.3 Τέλος, εξετάστηκαν τα ατομικά προφίλ των μαθητών ως προς την ορθότητα των απαντήσεων, προκειμένου να διερευνηθούν ενδεχόμενες δι-ατομικές διαφορές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3:ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.1 Συνολική επίδοση

Αρχικά εξετάστηκαν οι απαντήσεις των παιδιών ως προς την ορθότητα της επιλογής τους. Οι λανθασμένες απαντήσεις κωδικοποιήθηκαν με 0 και οι σωστές με 1. Σημειώνουμε ότι δεν υπήρξαν περιπτώσεις μη απάντησης. Οι κωδικοί αυτοί μπορούν να θεωρηθούν και ως αριθμητικές τιμές, επιτρέποντας την άθροισή τους για τον υπολογισμό της συχνότητας της σωστής απάντησης ανά έργο, αλλά και της βαθμολογίας του κάθε παιδιού στο σύνολο των έργων.

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται το είδος της απάντησης (σωστή/ λανθασμένη) ανά παιδί και ανά έργο. Επίσης, στον Πίνακα 1., διακρίνει κανείς και τις επιτυχίες των παιδιών συλλογικά ανά Έργο, δηλαδή κατηγορία, προσέχοντας τις επιμέρους συχνότητες σωστών απαντήσεων σε κάθε μια δοκιμασία ξεχωριστά. Κατά αυτόν τον τρόπο παρατηρούμε πως την καλύτερη απόδοση την είχαν οι συμμετέχοντες στο Έργο 1 (μη μαθηματικές αναλογίες) και πιο συγκεκριμένα στη δοκιμασία 1.1 και 1.2 με 12 παιδιά να απαντούν σωστά από τα 13 και η χαμηλότερη απόδοση των μαθητών φαίνεται στο Έργο 4 –Διακριτές Ποσότητες και πιο συγκεκριμένα στο 4.1 , με κοντινή βαθμολογία των 2 πετυχημένων απαντήσεων στις 13 αποπήρες που εντοπίζονται στο Έργο 2-Συνεχείς Ποσότητες και Έργο 4– Διακριτές Ποσότητες και στις δοκιμασίες 2.2 και 4.3 αντίστοιχα.

Οι συμμετέχοντες που εμφάνισαν τις περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις, σύμφωνα με τον Πίνακα 1., είναι τα Π4,Π6, Π7, Π9 Π11,Π13 με σύνολο σωστών απαντήσεων κάτω του μισού. Αντίθετα, οι συμμετέχοντες που φέρουν τις περισσότερες σωστές απαντήσεις είναι Π3, Π8, Π12 , συγκεντρώνοντας 9, 8, 9 σωστές απαντήσεις αντίστοιχα.

Από τα στοιχεία του Πίνακα 1 προκύπτει ότι η μέση επίδοση των 13 παιδιών στα 3 Έργα (συνολικά 12 δοκιμές) είναι 72/156 =0.46, δηλ. έγινε η σωστή επιλογή από τα παιδιά περίπου στις μισές περιπτώσεις. Εστιάζοντας στην επίδοση των παιδιών στα έργα με τις μαθηματικές αναλογίες (Έργα 2, 3 και 4), παρατηρούμε ότι η μέση επίδοση των παιδιών στα τρία έργα (συνολικά 9 δοκιμές) ήταν 39/117=0,33, δηλαδή τα παιδιά επιλέγουν τη σωστή εναλλακτική περίπου στο ένα τρίτο των περιπτώσεων. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1, η επίδοση των παιδιών ήταν υψηλότερη στο Έργο 1 με τις μη μαθηματικές αναλογίες (33/39=85%) και πιο συγκεκριμένα στη δοκιμασία 1.1 και 1.2 με 12 από τα 13 παιδιά να επιλέγουν τη σωστή απάντηση. Λιγότερα παιδιά, αλλά πάλι η πλειοψηφία επιλέγει τη σωστή απάντηση στη δοκιμή Ε.2. Πιθανόν η δυσκολία των παιδιών σε αυτή την περίπτωση να οφείλεται στο ότι ένα μικρό μέρος των μαθητών δυσκολεύτηκε στην ερμηνεία της εικονικής αναπαράστασης των αντικειμένων, δηλαδή δεν γινόταν εύκολα αντιληπτό πως το τρακτέρ μπορεί να εμφανίζονταν με 2 ρόδες στην κάρτα, αλλά στην πραγματικότητα έχει 4 ρόδες.

Παιδί	Έργα													
	E1			E2			E3			E4			Σ1*	Σ2**
	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3		
Π1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	7	4
Π2	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	6	4
Π3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	9	6
Π4	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	4	2
Π5	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	7	4
Π6	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	1
Π7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0
Π8	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	8	5
Π9	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	5	3
Π10	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	6	3
Π11	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0
Π12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	9	6
Π13	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1
Σ3**	12	9	12	5	2	4	5	6	9	1	5	2	72	39
Σ4***	33			11			20			8				

* Σύνολο σωστών απαντήσεων ανά παιδί στα Έργα (12 δοκιμές)
**Σύνολο σωστών απαντήσεων ανά παιδί στα Έργα 2, 3, και 4 (9 δοκιμές)
*** Σύνολο σωστών απαντήσεων ανά δοκιμή (στις 13 απαντήσεις των παιδιών)
**** Σύνολο σωστών απαντήσεων ανά έργο (στις 3x13= 39 απαντήσεις)

Πίνακας 1.*Καταγραφή σωστών και λανθασμένων απαντήσεων, ανά έργο και ανά παιδί*

Η δεύτερη καλύτερη επίδοση (20/39= 0,51) παρατηρήθηκε στο Έργο 3 όπου συγκεντρώθηκαν συνολικά 20 σωστές απαντήσεις. Ενδεχομένως, αυτό οφείλεται στους εμφανείς άξονες συμμετρίας. Στην τρίτη δοκιμασία αυτού του έργου οι μαθητές φαίνεται να τα καταφέρουν καλύτερα, (9/13= 0,69), παρά το γεγονός ότι η θέση των γραμμοσκιασμένων χωρίων είναι διαφορετική στη σωστή εναλλακτική σε σχέση με τις δοθείσες. Οι λιγότερες σωστές απαντήσεις εμφανίστηκαν στην πρώτη δοκιμή του έργου αυτού (Ε3.1). Αυτό ενδεχομένως οφείλεται στην πρώτη επαφή των παιδιών με αυτό το έργο, στο οποίο εμφανίζονται και διακριτές ποσότητες.

Οι χαμηλότερες επιδόσεις παρατηρήθηκαν στα Έργα 2 και 4.

Στο Έργο 2 (συνεχείς ποσότητες) παρατηρείται το σύνολο των 11 σωστών απαντήσεων από τις 39 (11/39=0,28). Οι συγκεντρώσεις των σωστών απαντήσεων ανά δοκιμασία δεν φαίνεται να αποκλίνουν αισθητά, με την χαμηλότερη να είναι 2 μόλις σωστές απαντήσεις στη δοκιμασία 2, και 5 στην δοκιμασία 1 ως πιο πετυχημένη. Τα παιδιά φαίνεται να επιλέγουν τις εναλλακτικές με βάση κάποια ομοιότητα με τη δοθείσα εικόνα. Η θέση των γραμμοσκιασμένων χωρίων τα βοηθά στην Ε1.1 (ίδια στις δοθείσες και στη σωστή εναλλακτική), αλλά τα δυσκολεύει στην Ε2.2 (ίδια στις δοθείσες, διαφορετική στη σωστή εναλλακτική), Στο Έργο 4 (διακριτές ποσότητες) μόνο 8 από τις 39 απαντήσεις (20,5%) ήταν σωστές. Στο έργο αυτό, η δοκιμή 4.2 απέσπασε τις περισσότερες σωστές απαντήσεις με 5/13=0,38, και χαμηλότερη την 4.1 με μόνο 1 σωστή απάντηση.

3.2. Ατομική επίδοση

Εξετάζοντας τις ατομικές επιδόσεις, από τον Πίνακα 1 φαίνεται ότι όλα τα παιδιά τα καταφέρνουν καλά στο Έργο 1 με μόνο δύο παιδιά (Π13, Π2) να δίνουν από μία λανθασμένη απάντηση. Αντίθετα, διαφαίνονται δι-ατομικές διαφορές ως προς την επίδοση στα Έργα 2, 3, και 4.

Στον Πίνακα 1 εμφανίζεται μια αδρή κατηγοριοποίηση των παιδιών με βάση την ατομική τους επίδοση, η οποία σημαίνεται με χρώματα (βλ. Σ2). Συγκεκριμένα:

Στην πρώτη ομάδα που σημαίνεται με κίτρινο χρώμα, εντάχθηκαν τα παιδιά που έχουν επιτύχει σε περισσότερες από τις μισές δοκιμές στα Έργα 2,3,4. Πρόκειται για 3 παιδιά και, συγκεκριμένα, τα Π3, Π8 και Π12. Η καλύτερη επίδοση ήταν 6 σωστές απαντήσεις στις 9 ερωτήσεις (Π3, Π12)

Στη δεύτερη ομάδα που σημαίνεται με πορτοκαλί χρώμα εντάχθηκαν τα παιδιά που έχουν επιτύχει λιγότερες από τις μισές, αλλά περισσότερες από το ένα τέταρτο. Στην ομάδα αυτή εντάχθηκαν 5 παιδιά και, συγκεκριμένα, τα Π1, Π2,Π5,Π9,Π10.

Τέλος, αυτοί που είναι στην κόκκινη ομάδα, έχουν πετύχει κάτω από το ένα τέταρτο των δοκιμών. Στην ομάδα αυτή εντάχθηκαν τα παιδιά Π4, Π6, Π7, Π11.

Εξετάζοντας το Σ1 σε σχέση με το Σ2, παρατηρούμε ότι α) όλα τα παιδιά που βρέθηκαν στην πρώτη ομάδα, πέτυχαν και σε όλες τις δοκιμασίες του Ε1, δηλ. στις μη μαθηματικές αναλογίες, β) όλα τα παιδιά που βρέθηκαν στη δεύτερη ομάδα πέτυχαν σε τουλάχιστον δύο από τις τρεις δοκιμασίες του Ε1 και γ) στην τρίτη ομάδα βρέθηκαν παιδιά που τα πήγαν πολύ καλά στις μη μαθηματικές αναλογίες, αλλά απέτυχαν σε όλες τις δοκιμές των μαθηματικών αναλογιών (όπως τα Π7 και Π11), καθώς και παιδιά που απέτυχαν και στις μη μαθηματικές και στις μαθηματικές αναλογίες (όπως το Π13).

3.3 Αιτιολογήσεις

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε τις εξηγήσεις των παιδιών στα έργα που φορούν μαθηματικές αναλογίες (Ε2, Ε3, Ε4). Μέσα από τις καταγεγραμμένες απαντήσεις των παιδιών, προέκυψε ο διαχωρισμός των αιτιολογήσεων αυτών σε 3 αδρές κατηγορίες, με βασικό κριτήριο κατά πόσο αυτές αναφέρονται και με ποιο τρόπο στα μεγέθη που ενυπάρχουν στην κάθε κατάσταση. Αυτές οι κατηγορίες αφορούν ξεχωριστά και ομαδοποιούν κοινά χαρακτηριστικά μεταξύ των αιτιολογήσεων και είναι οι εξής:

Α. Μη εξήγηση

Σε αυτή την κατηγορία κατατάσσονται οι απαντήσεις των συμμετεχόντων που, για τους δικούς τους λόγους , οι οποίοι μπορούν να ποικίλουν κατά παράγοντα, αποφάσισαν να μην λάβουν υπόψη τους την ερώτηση που τους γίνονταν προκειμένου να αιτιολογήσουν την επιλογή τους , με αποτέλεσμα να μην δώσουν και απάντηση που θα ξεκαθάριζε τα κριτήρια επιλογής τους.

Απαντήσεις του τύπου «δεν ξέρω» επίσης εντάχθηκαν σε αυτή την κατηγορία. Στην ίδια κατηγορία εντάχθηκαν και αιτιολογήσεις των συμμετεχόντων που ήταν ιδιοσυγκρασιακές, όπως για παράδειγμα «γιατί έτσι θέλει το γατί». Επιπλέον, στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν και οι αιτιολογήσεις που λάμβαναν υπόψη μη σχετικά μορφολογικά στοιχεία της κατάστασης, όπως το χρώμα και το σχήμα, όπως οι παρακάτω:

Είναι όλο μωβ και καφέ (Π10, Ε3.3)

Είναι σα σημαία (Π3, Ε2.1)

Στην κατηγορία αυτή εντάχθηκαν και κάποιες εξηγήσεις που δεν ήταν δυνατόν να ερμηνευθούν. Τέτοιο παράδειγμα είναι η εξήγηση «είναι ολοκληρωμένο» που έδωσε το Π4 συστηματικά σε όλες τις δοκιμές.

Β. Απόλυτο Μέγεθος

Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται οι εξηγήσεις που αναφέρονται σε κάποιο από τα μεγέθη που ενυπάρχουν στις καταστάσεις, δηλαδή είτε στην επιφάνεια, είτε στο πλήθος, ως απόλυτο μέγεθος. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτής της κατηγορίας είναι τα εξής:

Έχει λίγο κόκκινο (Π13, Ε2.1)

Έχει 4 μπαλίτσες (Π9, Ε3.2)

Γ. Σχέσεις μεταξύ μεγεθών

Στην κατηγορία αυτή εντάσσονται οι αιτιολογήσεις που αναφέρονται σε σχέσεις μεταξύ των μεγεθών που ενυπάρχουν στις καταστάσεις, δηλαδή, είτε στην επιφάνεια, είτε στο πλήθος. Οι σχέσεις στις οποίες αναφέρθηκαν τα παιδιά περιλάμβαναν σχέσεις διάταξης, προσθετικές και πολλαπλασιαστικές σχέσεις, στις οποίες θα αναφερθούμε ξεχωριστά παρακάτω. Παραδείγματα αιτιολογήσεων αυτής της κατηγορίας είναι τα εξής:

Έχει περισσότερες μπάλες από αυτό και αυτό (Π.13, Ε3.3)

Έχει το πιο λίγο πράσινο (Π13, Ε2.3)

Έχει μια τελίτσα παραπάνω (Π5, Ε4.3)

Είναι το μισό (Π12, Ε2.1, Ε2.2, Ε2.3)

Στο Παράρτημα Γ παρουσιάζονται όλες οι εξηγήσεις των παιδιών, ανά έργο και δοκιμή, με χρωματικό κωδικό που υποδεικνύει σε ποια κατηγορία εντάχθηκε η κάθε εξήγηση. Στον Πίνακα 2 παρουσιάζεται η συχνότητα κάθε κατηγορίας ανά έργο και δοκιμή.

Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 2, η επικρατούσα κατηγορία είναι η «Μη εξήγηση», η οποία στο σύνολο το 117 εξηγήσεων, αποσπά το ποσοστό 44,4%. Το αποτέλεσμα αυτό είναι μάλλον αναμενόμενο, με δεδομένη την ηλικία των παιδιών. Ωστόσο, η κατηγορία «Σχέσεις μεταξύ μεγεθών» ακολουθεί με ποσοστό 34,2%. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι σε περίπου το ένα τρίτο των δοκιμών, οι σχέσεις μεταξύ μεγεθών λειτούργησαν ως κριτήριο επιλογής της απάντησης και αιτιολόγησής της. Τέλος, η κατηγορία «Απόλυτο μέγεθος» απέσπασε το ποσοστό 21,4%. Αυτό υποδηλώνει ότι στο ένα πέμπτο περίπου των δοκιμών, το αντίστοιχο μέγεθος αναγνωρίστηκε ως κριτήριο για την επιλογή και αιτιολόγηση της απάντησης, αλλά οι σχέσεις μεταξύ των μεγεθών είτε δεν αναγνωρίστηκαν, είτε δεν εκφράστηκαν στην αιτιολόγηση.

Έργο	**Δοκιμή**	**Μη εξήγηση**	**Απόλυτο Μέγεθος**	**Σχέσεις Μεγεθών**	**Σύνολο**
Ε2	**Ε2.1**	9	3	1	13
	Ε2.2	7	3	3	13
	Ε2.3	8	2	3	13
Ε3	**Ε3.1**	4	3	6	13
	Ε3.2	5	2	6	13
	Ε3.3	4	4	5	13
Ε4	**Ε4.1**	5	3	5	13
	Ε4.2	4	3	6	13
	Ε4.3	6	2	5	13
Σύνολο		52	25	40	117

Πίνακας 2. *Συχνότητα των κατηγοριών εξήγησης ανά έργο και ανά δοκιμή.*

Στον Πίνακα 2 παρατηρείται επίσης ότι τα έργα στα οποία ενυπήρχε το μέγεθος του πλήθους (Ε3, Ε,4), μειώνεται η συχνότητα της κατηγορίας «Μη εξήγηση», κάτι που υποδηλώνει ότι τα παιδιά είναι περισσότερο εξοικειωμένα με το μέγεθος αυτό και έχουν περισσότερα μαθηματικά εργαλεία να το πραγματευτούν ως απόλυτο μέγεθος, ή σε σχέση με το πλήθος μιας άλλης συλλογής. Τα παιδιά προσδιόρισαν το πλήθος είτε με άμεση αναγνώριση, είτε με καταμέτρηση. Για παράδειγμα:

Δε χρειάζεται να τα μετρήσω (Π12, Ε3.1)

Ένα, δύο, τρία, τέσσερα, πέντε, έξι. Έξι βλέπω (Π9, Ε4.2)

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι η πλειοψηφία των αιτιολογήσεων της κατηγορίας «Σχέσεις μεταξύ μεγεθών» αναφέρονται σε απλές σχέσεις διάταξης («περισσότερο/λιγότερο», «μεγαλύτερο/μικρότερο»), ενώ σε ορισμένες περιπτώσεις αναφέρονται σε σύγκριση πλήθους μέσω της διαφοράς (προσθετική σύγκριση).

Πολύ λιγότερες ήταν οι αιτιολογήσεις που αφορούσαν πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ μεγεθών και προήλθαν από τέσσερα παιδιά και, συγκεκριμένα το Π3, το Π5 και το Π12 (βλ. Παράρτημα, Β).

Πιο συγκεκριμένα, το Π3 και το Π12 αναφέρθηκαν ρητά στη σχέση 1:2 στο πλαίσιο των συνεχών ποσοτήτων:

Είναι σα ζώνη μισή πράσινη (Π3, Ε2.3)

Είναι το μισό (Π12, Ε2.1, Ε2.2, Ε2.3)

Στα έργα Ε3 και Ε4 (διακριτές και διακριτές/συνεχείς ποσότητες), επικαλέστηκαν προσθετικές σχέσεις μεταξύ ίσων αριθμών (τα γνωστά «ζευγαράκια»). Από τη συνολική τους συμπεριφορά στη διάρκεια της συνέντευξης φάνηκε ότι χρησιμοποιούσαν τις συγκεκριμένες προσθετικές σχέσεις προκειμένου να εκφράσουν τη σχέση 1:2.

Πιο συγκεκριμένα, το Π3 αιτιολόγησε ως εξής:

(Το δεδομένο) *Είναι 3 και 3 και* (η επιλογή είναι*) 3* (Ε3.2)

Είναι 4 και 4, 8 (Π3, Ε3.3, Ε4.1)

Το Π5 αιτιολόγησε ως εξής:

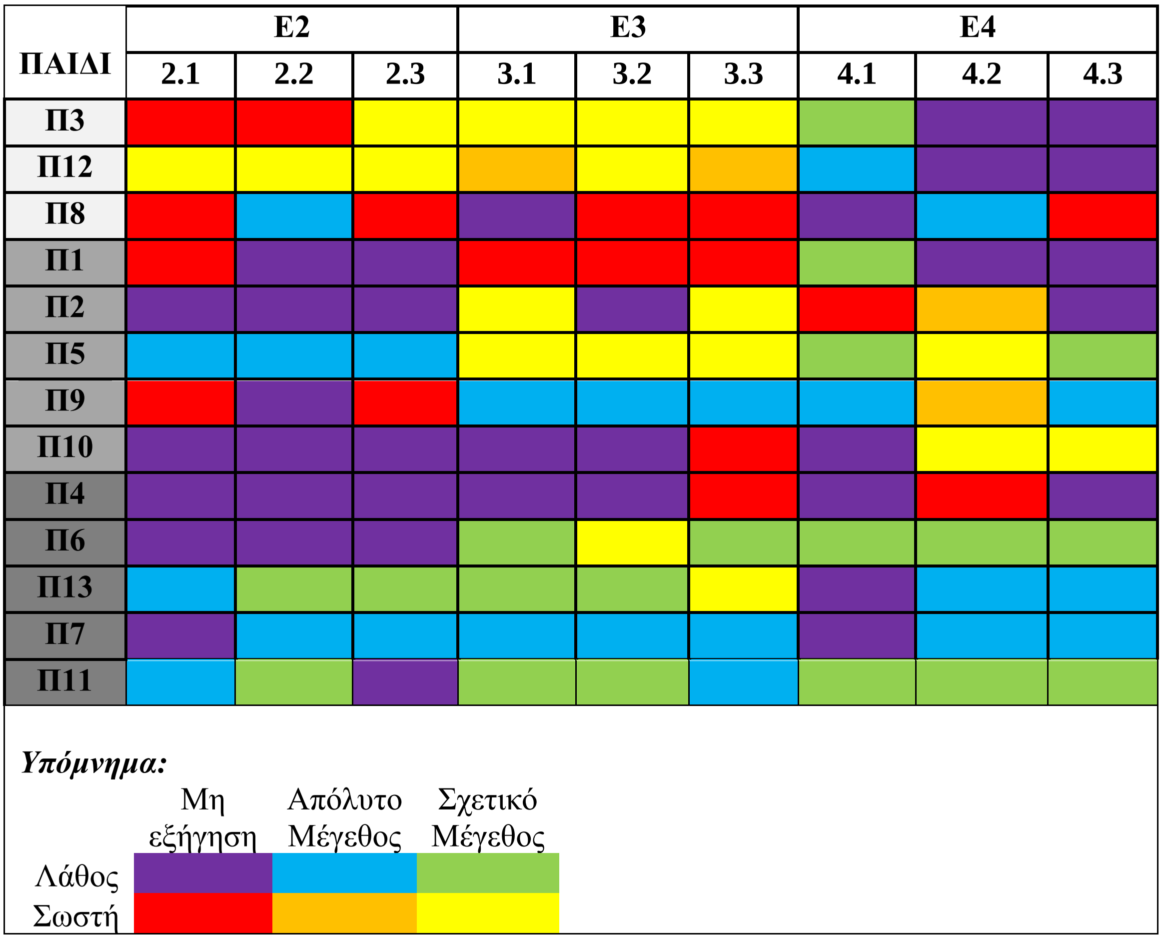
Αυτό έχει και 2 και 2 (δείχνει την επιλογή) *και αυτό έχει 2*(δείχνει το δεδομένο) (Ε3.1)

3 και 3 κάνουν 6 (Ε3.2)

Παρόμοια, το Π12 αιτιολόγησε το Ε3.2 λέγοντας ότι «3 και 3 κάνουν 6».

3.4 Απαντήσεις και εξηγήσεις: Ατομικά προφίλ

Στον Πίνακα 3 παρουσιάζεται το ατομικό προφίλ κάθε παιδιού, ανάλογα με το την απάντηση (σωστή)/λανθασμένη) και την κατηγορία εξήγησης («Μη Εξήγηση», «Απόλυτο μέγεθος», «Σχέση μεταξύ μεγεθών») που έδωσε στα έργα των μαθηματικών αναλογιών (Ε2, Ε3, Ε4), ανά δοκιμή. Τα παιδιά είναι διατεταγμένα σε φθίνουσα σειρά, με βάση το πλήθος των σωστών απαντήσεων που έδωσαν συνολικά. Με διαφορετικές αποχρώσεις του γκρι σημαίνονται στην πρώτη στήλη τα παιδιά των διαφορετικών ομάδων (πρώτη, δεύτερη, τρίτη), όπως παρουσιάστηκαν παραπάνω.



Πίνακας 3: *Οι απαντήσεις (σωστή/ λανθασμένη) και η κατηγορία εξήγησης, ανά παιδί, ανά έργο και ανά δοκιμή.*

Από τον Πίνακα 3 φαίνεται καταρχάς ότι το πλήθος των σωστών απαντήσεων που δίνει κάθε παιδί δε συνδέεται απαραίτητα με την τάση του ή την ικανότητά του να τις αιτιολογεί. Πράγματι, το Π8 που βρίσκεται στην πρώτη ομάδα, δεν αιτιολόγησε ουσιαστικά τη μεγάλη πλειοψηφία των απαντήσεών του, ακόμα και αυτές που ήταν σωστές. Αντίθετα, τα παιδιά Π6, Π7, Π13 και Π11, τα οποία βρίσκονται στην τρίτη ομάδα, έδωσαν σχετικά λίγες «μη εξηγήσεις», λιγότερες από το Π8 και από αρκετά παιδιά της δεύτερης ομάδας (π.χ. το Π10 και το Π2) που είχαν καλύτερη επίδοση. Συστηματικά έδωσαν «μη εξηγήσεις» σε πάνω από τις μισές απαντήσεις τους τα παιδιά Π8, Π1, Π2, Π10, Π4.

Παρατηρούμε επίσης ότι οι εξηγήσεις του τύπου «Απόλυτο Μέγεθος» (αυτές που σημαίνονται με πορτοκαλί ή γαλάζιο χρώμα στον Πίνακα 3), εμφανίζονται πιο συχνά σε λανθασμένες απαντήσεις. Πράγματι, από τις συνολικά 27 εξηγήσεις αυτού του τύπου, με σωστή απάντηση συνδέονται μόνο οι 4 (με πορτοκαλί χρώμα στον Πίνακα 3). Αυτό ενδεχομένως υποδηλώνει ότι τα παιδιά, όταν δίνουν τέτοιου τύπου εξηγήσεις, επικεντρώνουν σε μία μόνο από τις ποσότητες της δεδομένης κατάστασης και δεν αναζητούν σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων που θα μπορούσαν να οδηγήσουν στην ζητούμενη σχέση.

Τέλος, παρατηρούμε ότι οι εξηγήσεις του τύπου «Σχέσεις μεταξύ μεγεθών» (αυτές που σημαίνονται με πράσινο και κίτρινο χρώμα στον Πίνακα 3) δεν αντιστοιχούν απαραίτητα σε σωστές απαντήσεις. Πράγματι, από τις συνολικά 37 απαντήσεις αυτής της κατηγορίας, οι 18 αντιστοιχούν σε σωστές απαντήσεις, ενώ οι 19 αντιστοιχούν σε λανθασμένες απαντήσεις. Τα παιδιά που χρησιμοποίησαν συστηματικά αυτού του τύπου την εξήγηση (σε πάνω από τις μισές εξηγήσεις που έδωσαν) είναι α) τα παιδιά Π3 και Π5 (από την πρώτη και δεύτερη ομάδα, αντίστοιχα), με τις περισσότερες από αυτές τις εξηγήσεις να αντιστοιχούν σε σωστές απαντήσεις και β) τα παιδιά Π6, Π13 και Π11 (τρίτη ομάδα), με τις περισσότερες από αυτές τις εξηγήσεις να αντιστοιχούν σε λανθασμένη απάντηση. Το αποτέλεσμα αυτό θα αναλυθεί περισσότερο στη συνέχεια, μέσω της εξέτασης των λανθασμένων απαντήσεων των παιδιών.

Τέλος, επισημαίνουμε ότι υπήρχαν πολύ λίγες εξηγήσεις που παραπέμπουν σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις και δόθηκαν από 3 συγκεκριμένα παιδιά, τα Π3, Π12 (πρώτη ομάδα) και Π5 (δεύτερη ομάδα). Το Π5 έδωσε τέτοιου είδους εξήγηση σε δύο από τις τρεις δοκιμές του Έργου 3 (διακριτές/συνεχείς ποσότητες), αναφερόμενο στο πλήθος και βασιζόμενο σε προσθετικές σχέσεις («ζευγαράκια»). Ωστόσο, δεν επικαλέστηκε τέτοια εξήγηση στο Έργο 4 (διακριτές ποσότητες). Το Π3 αναφέρθηκε στο «μισό» σε μία δοκιμή του Ε2, και τα «ζευγαράκια» σε δύο δοκιμές του Ε3 και μία του Ε4. Το Π12 αναφέρθηκε ρητά στο «μισό» και στις τρεις δοκιμές του Ε2, και χρησιμοποίησε επίσης τα «ζευγαράκια» σε δύο δοκιμές του Ε3 και μία του Ε4.

Θα μπορούσε να επισημάνει κανείς ότι μόνο τα Π3, Π12 αναφέρονται σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις τόσο στο πλαίσιο συνεχών, όσο και στο πλαίσιο των διακριτών και διακριτών/συνεχών ποσοτήτων, αλλά όχι απολύτως συστηματικά. Η μεγαλύτερη συστηματικότητα εμφανίζει το Π12, στο πλαίσιο των συνεχών ποσοτήτων.

Γενικότερα, υπήρξαν ενδείξεις συστηματικότητας εντός του κάθε έργου για τα εξής παιδιά: Τα Π3 και Π12 απάντησαν συστηματικά σωστά σε όλες τις δοκιμές των Ε2, Ε3. Επίσης, τα Π1 και Π5 απάντησαν συστηματικά σωστά σε όλες τις δοκιμές του Ε3.

4.3. Εξέταση των λανθασμένων απαντήσεων και στρατηγικές

Τα δεδομένα εξετάστηκαν ως προς τις επιλογές που έκαναν τα παιδιά, όσον αφορά τις εναλλακτικές που τους δόθηκαν. Στο Παράρτημα Γ παρουσιάζονται οι επιλογές που έκανε κάθε παιδί, ανά έργο και δοκιμή.

Στον Πίνακα 4 παρουσιάζεται η συχνότητα κάθε επιλογής, ανά έργο και ανά δοκιμή. Με κίτρινο σημαίνονται οι επιλογές που αντιστοιχούν σε σωστή απάντηση.

Έργο	Δοκιμή	Αριθμός επιλογής			
		1	**2**	**3**	**4**
Ε1	Ε1.1	0	0	1	12
	Ε1.2	0	4	9	0
	Ε1.3	0	0	12	1
Ε2	Ε2.1	1	0	5	7
	Ε2.2	2	11	0	0
	Ε2.3	5	0	4	4
Ε3	Ε3.1	5	4	1	3
	Ε3.2	5	4	1	3
	Ε3.3	9	4	0	0
Ε4	Ε4.1	6	1	1	5
	Ε4.2	6	1	1	5
	Ε4.3	2	0	11	0

Πίνακας 4. *Συχνότητα κάθε επιλογής, ανά έργο και ανά δοκιμή.*

Από τον Πίνακα 4 φαίνεται ότι στο Ε1 (μη μαθηματικές αναλογίες) η πλειοψηφία των υποκειμένων προτίμησαν τις επιλογές 4,3 και 3 αντίστοιχα για τις δοκιμασίες Ε1.1, Ε1.2, και Ε1.3. Στο συγκεκριμένο έργο παρατηρείται πως η τάση των μαθητών να επιλέξουν αυτές τις απαντήσεις συμπίπτει και με την σωστή μαθηματική απάντηση στην κάθε δοκιμασία. Για το Έργο 1, και την δοκιμασία Ε1.1, κανένα παιδί δεν διάλεξε τις επιλογές 1 και 2 , ενώ μόλις 1 παιδί υπέδειξε την 3η επιλογή ως τη σωστή. Στην δοκιμασία Ε1.2, κανένας μαθητής δεν φάνηκε να επιλέγει τις απαντήσεις 1 και 4. Μόλις 4 μαθητές επέλεξαν την απάντηση 2 . Τέλος, στη δοκιμασία Ε1.3, κανένας μαθητής δεν επέλεξε τις απαντήσεις 1 και 2 και μόνο ένας διάλεξε την 4η επιλογή. Από τα στοιχεία του Πίνακα 4 επιβεβαιώνεται σε ελάχιστες περιπτώσεις επελέγησαν λανθασμένες εναλλακτικές στην περίπτωση των μη μαθηματικών αναλογιών.

Αντίθετα, όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα, στα έργα με τις μαθηματικές αναλογίες (Ε2, Ε3, Ε4), λανθασμένες επιλογές έγιναν με μεγαλύτερη συχνότητα.

Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά τοΕ2 (συνεχείς ποσότητες), στην δοκιμή Ε2.1, η μη ορθή επιλογή 4 ήταν η επικρατούσα απάντηση, με 7 παιδιά να την επιλέγουν. Σε αυτή την περίπτωση, τα παιδιά φάνηκαν να επιλέγουν το σχήμα με το μικρότερο χρωματισμένο χωρίο (βλ. Εικόνα 2.1). Στη δοκιμή Ε2.3, επικρατούσα ήταν η μη ορθή επιλογή 1, στην οποία επιλέγεται πάλι το σχήμα με το μικρότερο χρωματισμένο χωρίο (βλ. Εικόνα 2.3). Ακολουθεί η επίσης λανθασμένη επιλογή 3, η έχοντας την ίδια συχνότητα με την ορθή επιλογή. Με την επιλογή 3 επιλέγεται πάλι ένα σχήμα με μικρό χρωματισμένο χωρίο (βλ. Εικόνα 2.3).

Όσον αφορά το Ε3 (συνεχείς/διακριτές ποσότητες), η σωστή επιλογή είναι επικρατούσα σε όλες τις δοκιμές. Ωστόσο, στην Ε3.1, πολύ κοντά στην επικρατούσα βρίσκεται η επιλογή 2, ακολουθούμενη από την επιλογή 4.

Στο Ε4 (διακριτές ποσότητες) παρατηρούνται, όπως φάνηκε και από την προηγούμενη ενότητα, οι περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις, Πιο συγκεκριμένα, στην Ε4.1, επικρατούσα είναι η λανθασμένη επιλογή 1, στην οποία εμφανίζεται το ίδιο πλήθος χρωματισμένων κουκκίδων με την πρώτη από τις δεδομένες σχέσεις (βλ. Εικόνα 4.1). Ακολουθεί η επίσης λανθασμένη επιλογή 4, η οποία είναι πανομοιότυπη με τη δεδομένη, εκτός από το χρώμα των κουκκίδων (βλ. Εικόνα 4.1). Τέλος, στην Ε4.3, με την εξαίρεση δύο παιδιών, όλα τα υπόλοιπα επέλεξαν την επιλογή 3.

Εξετάζοντας τη συμπεριφορά των παιδιών στη διάρκεια της συνέντευξης, σε συνδυασμό με τις εξηγήσεις που έδωσαν, θα μπορούσαμε να διακρίνουμε ορισμένες στρατηγικές, τις οποίες κάποια παιδιά εφάρμοσαν συστηματικά, κάποια άλλα κατά περίπτωση. Προκειμένου να εξεταστούν σε μεγαλύτερο βάθος οι λανθασμένες επιλογές των παιδιών, στη συνέχεια εξετάζονται οι στρατηγικές που ακολούθησαν. Βοηθητικά, θα επικαλεστούμε και τις εξηγήσεις που έδωσαν τα παιδιά (βλ. Πίνακα 2 και Πίνακα 3, καθώς και Παράρτημα Γ).

Πιο συγκεκριμένα, οι στρατηγικές είναι οι εξής:

Α) Αβάσιμη επιλογή.

Θεωρήσαμε ότι τα παιδιά ακολουθούσαν αυτή τη στρατηγική όταν ρητά δήλωναν ότι την έκαναν στην τύχη, ή συστηματικά απέφευγαν να αιτιολογήσουν την επιλογή τους.

Για παράδειγμα, η στρατηγική αυτή παρατηρήθηκε στο Π4, μιας και οι απαντήσεις του περιορίζονταν στο «έτσι μ' αρέσει» και το «είναι ολοκληρωμένο» για κάθε φορά που παροτρύνονταν να απαντήσει στο γιατί επέλεξε αυτό που επέλεξε (βλ. Παράρτημα Γ).

Τη μέθοδο της τυχαίας επιλογής φάνηκε να εμφανίζει και το Π6, αφού οι απαντήσεις του περιορίζονταν στο «είναι ίδια», χωρίς να δίνει κάποια περαιτέρω εξήγηση, επιβεβαιώνοντας τον ισχυρισμό μου στη δοκιμασία 3 του τρίτου έργου που μου ανέφερε ότι κάνει άμπε μπα μπλομ (βλ. Παράρτημα Γ).

Το Π8 καθόλη τη διάρκεια της συνέντευξης έδινε ως απάντηση τη φράση «δεν ξέρω», ή δεν έδινε καθόλου απάντηση στην κατ΄ επανάληψη ερώτηση «γιατί» που πραγματοποιούνταν στο τέλος κάθε δοκιμασίας.

Θα πρέπει να σημειωθεί, ωστόσο, ότι η αβάσιμη επιλογή δεν είναι απαραίτητο ότι είναι τυχαία. Για παράδειγμα, το Π.8 ενώ δείχνει να απαντά τυχαία, καταφέρνει το σκορ των 8/12 σωστών απαντήσεων, το οποίο μάλλον δεν μπορεί να αποδοθεί σε τυχαία διεργασία σκέψης.

Β) ***Ταύτιση με το δεδομένο όρο του λόγου.***

Σε πολλές περιπτώσεις, τα παιδιά φάνηκαν να αγνοούν τη δοθείσα σχέση που τους παρέχονταν με την έναρξη της κάθε δοκιμασίας, και να επικεντρώνονται στο πως θα επιλέξουν μία απάντηση που να μοιάζει περισσότερο στο δεδομένο πρώτο όρο του λόγου.

Επανερχόμενοι στο Ε2, (συνεχείς ποσότητες), παρατηρήθηκε κατά τις ατομικές συνεντεύξεις των υποκειμένων πως οι περισσότερες μαθηματικά λανθασμένες απαντήσεις των παιδιών πραγματοποιήθηκαν επειδή αγνοούσαν τη δοθείσα σχέση μεταξύ των δεδομένων στην αρχή της δοκιμασίας και συνέχιζαν εργαζόμενοι πάνω στο δεδομένο πρώτο μέλος της σχέσης, το οποίο όπως φαίνεται είναι ένα κενό σχήμα (βλέπε Εικόνα 2.1). Έτσι λοιπόν η στρατηγική των παιδιών παρατηρήθηκε να είναι η εξής. Επέλεγαν το σχήμα που είχε τη λιγότερη ποσότητα χρώματος ώστε να «ταιριάζει» με το λευκό – άδειο σχήμα που τους δίνονταν. Αυτή η στρατηγική φαίνεται να υπόκεινται των συχνών λανθασμένων απαντήσεων των παιδιών στο Ε2 που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα.

Ένα παράδειγμα εφαρμογής αυτής της στρατηγικής είναι το εξής:

Ο συμμετέχοντας Π10 κατά την ενασχόληση του με το Ε2, φάνηκε να ακολουθεί την ίδια τακτική για την επιλογή της απάντησής του. Ήδη από τη δοκιμή Ε2.1 έως και την Ε2.3 , το παιδί έτεινε να επιλέγει απάντηση , δείχνοντάς την με το χέρι του, αφού πρώτα πραγματοποιούσε σύγκριση μεταξύ του κενού-χρωματικά σχήματος και τις επιμέρους ποσότητες λευκού χρώματος των επιλογών. Πιο συγκεκριμένα, το υποκείμενο στην ερώτηση «γιατί» που του πραγματοποιούνταν έλεγε «Αυτό είναι όλο άσπρο(δεδομένο) και αυτό είναι άσπρο (επιλογή)». Το παιδί, δείχνοντας το δεδομένο κενό τετράγωνο του οποίου το «ζευγάρι» έπρεπε να βρει, αγνοούσε εντελώς την παραπάνω σχέση της αναλογίας 1:2 και επικεντρώνονταν σε κριτήρια ομοιότητας ή αλλιώς ποιο από όλες τις επιλογές μοιάζει περισσότερο με αυτό που δίνονταν. Δηλαδή δεν αντιμετώπισε την δοκιμή ως αποστολή εύρεσης του μισού, αλλά ποιο από τις επιλογές θα ταίριαζε σε ποσότητα άσπρου χρώματος περισσότερο με το κενό σχήμα. Η απάντηση αυτή επαναλαμβάνονταν και για τις επόμενες δοκιμές του Έργου, Ε2.2 και Ε2.3.

Παρόμοια διεργασία φαίνεται να πραγματοποιήθηκε και στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων (Ε4), όπου τα παιδιά, έτειναν να διαλέγουν απάντηση στην οποία απεικονίζονταν χρωματισμένο το πλήθος που ήταν πιο κοντά στο δεδομένο πρώτο όρο του λόγου.. Η στρατηγική αυτή φαίνεται να υπόκειται των λανθασμένων απαντήσεων, για παράδειγμα, στη δοκιμή Ε4.1, όπου ενώ η δοθείσα σχέση είναι το 1:2 και το δεδομένο πρώτο μέλος της σχέσεις είναι 4 κουκίδες, τα παιδιά διάλεγαν την επιλογή με πλήθος 3 (βλ. προηγούμενη ενότητα).

Ένα παράδειγμα εφαρμογής αυτής της στρατηγικής είναι το εξής:

Χαρακτηριστική είναι η απάντηση του Π7 στην δοκιμή Ε4.3. Ο συμμετέχοντας σε αυτή την περίπτωση επέλεξε το κριτήριο επιλογής του να είναι η προσέγγιση του αριθμού του πλήθους των δεδομένων. Για άλλη μια φορά, δεν παρατηρήθηκε το υποκείμενο να βασίζεται και να ψάχνει τη σχέση 1:2 που δίνονταν ως δεδομένο παραπάνω , αλλά να επιλέγει την απάντηση του με βάση τον πιο κοντινό αριθμό σε αυτόν που απεικονίζονταν , δηλ. του δεδομένου. Πιο συγκεκριμένα, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 4.3 (Διακριτές ποσότητες) για το κομμάτι της δοκιμασίας, η απάντηση στην ερώτηση επεξήγησης «γιατί» ήταν η εξής : «είναι αυτά 3(δείχνοντας την επιλογή) και αυτά 4 (δείχνοντας το δεδομένο)».

Γ) Συγκρίσεις μεταξύ των επιλογών

Κάποια παιδιά παρατηρήθηκε πως πραγματοποιούσαν συγκρίσεις μεταξύ των επιλογών, συγκρίνοντας ως προς το πλήθος (στις διακριτές ποσότητες), είτε συγκρίνοντας μεταξύ των χρωματισμένων επιφανειών στις συνεχείς ποσότητες. Τουλάχιστον 2 υποκείμενα έτειναν να επιλέγουν για σωστή απάντηση 2 επιλογές κατ εξακολούθηση σε όλες τις δοκιμασίες, τις οποίες τους ζητήθηκε να περιορίσουν στη μια.

Ένα παράδειγμα εφαρμογής αυτής την τεχνικής είναι το εξής:

Στην ανάλυση των απαντήσεων βρέθηκε ο συμμετέχοντας Π11 να προσπαθεί στο Ε2.2 να περιορίσει την επιλογή του σε μια , αφού συνεχώς προσπαθούσε να μου περιγράψει τις σχέσεις που έβλεπε μεταξύ των επιλογών. Αν και εν τέλη αποφάσισε να περιοριστεί σε μια εκ των 2, η απάντησή του στην ερώτηση «γιατί», ήταν η εξής «Έχει μια μικρή γραμμή. Αυτό δεν ταιριάζει με αυτό γιατί είναι πολύ (σύγκριση μεταξύ επιλογών)». Παρατηρήθηκε σε αυτή την περίπτωση πως το υποκείμενο αγνοούσε όχι μόνο την δοθείσα σχέση αναλογίας 1:2, αλλά και την ύπαρξη του ζητούμενου, προσπαθώντας έτσι να ταιριάξει τις επιλογές μεταξύ τους. Δηλαδή, ο μαθητής δεν έδινε βάση σε κανένα από τα δεδομένα, και έναντι αυτού προσπαθούσε να ζευγαρώσει σε 2άδες τις επιλογές. Χρειάστηκε πολλές φορές να υπενθυμίσω στον μαθητή πως η επιλογή του πρέπει να ταιριάξει με το ζητούμενο, δείχνοντας του τις αντίστοιχες κάρτες.

Αντίστοιχο παράδειγμα για τις διακριτές ποσότητες και το Ε4 είναι η ύπαρξη έντονης σύγκρισης μεταξύ πλήθους δεδομένου και επιλογών. Πιο συγκεκριμένα, η πλειοψηφία των συμμετεχόντων έτεινε να επιλέγει για σωστή απάντηση αυτή, η οποία συμβόλιζε τον αριθμό που ήταν κοντινότερος σε αυτόν που συμβολίζονταν στο δεδομένο. Για άλλη μια φορά η σχέση αναλογίας 1:2 δεν επεξεργάστηκε. Ένα παράδειγμα αυτής της τεχνικής είναι το εξής: ο συμμετέχοντας Π7, εργαζόμενος πάνω στο Ε4.3 επέλεξε την απάντηση του (λανθασμένα), την οποία αιτιολόγησε ως εξής: «Είναι αυτά 3(δείχνοντας την επιλογή) και αυτά 4 (δείχνοντας το δεδομένο)» αμέσως έγινε αντιληπτό ότι για το συγκεκριμένο υποκείμενο η σχέση που επιζητούσε να δείξει ήταν η αριθμητική προσέγγιση του δεδομένου.

Σημειώνουμε επίσης ότι στο Έργο 3ο , στο οποίο οι συμμετέχοντες φαίνεται να τα πηγαίνουν καλύτερα, ο υπάρχων σχεδιασμένος άξονας συμμετρίας φάνηκε να ενθαρρύνει τα υποκείμενα να μην απορρίψουν τη λάθος επιλογή των 5 σχεδιασμένων κουκίδων, η οποία φαίνεται να είναι και η πιο συχνή (βλέπε 3.3.1)

Τέλος, επισημαίνουμε πως στο Έργο 1ο , στο οποίο οι λανθασμένες απαντήσεις ήταν ελάχιστες, αυτές δικαιολογούνται με βάση το κριτήρια που θέσπισαν τα παιδιά για των συσχετισμό του δεδομένου πρώτου όρου το λόγου, με το δεύτερο. Για παράδειγμα, στη δοκιμασία Ε.1.1 Π13 επέλεξε να ταιριάξει τη γάτα με την καμηλοπάρδαλη ,επειδή στην κάρτα παρατήρησε πως η γάτα είχε μακρύ λαιμό, όπως και η καμηλοπάρδαλη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 :ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ- ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σε αυτή την εμπειρική μελέτη διερευνήσαμε τις πρώιμες ικανότητες των παιδιών της πρωτοσχολικής ηλικίας στην αναγνώριση και επεξεργασία μαθηματικών και μη μαθηματικών αναλογικών σχέσεων. Τα 13 παιδιά που συμμετείχαν εξετάστηκαν σε ένα έργο με μη μαθηματικές αναλογίες (Ε1), και τρία έργα μαθηματικών αναλογιών που αφορούσαν όλα τη σχέση 1:2 σε διαφορετικά πλαίσια. Πιο συγκεκριμένα, η σχέση 1:2 αναπαραστάθηκε ως λόγος α) συνεχών ποσοτήτων (Ε2), β) συνεχών / διακριτών ποσοτήτων και γ) διακριτών ποσοτήτων. Το πλαίσιο διαφοροποιήθηκε και με τη μεταβολή άλλων παραμέτρων, όπως η θέση στην οποία εμφανίζονταν τα χρωματισμένα χωρία στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων και η διάταξη των κουκκίδων στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων. Σημειώνουμε ότι η σχέση 1:2 επιλέχθηκε γιατί, σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, είναι η πρώτη σχέση με την οποία εξοικειώνονται τα μικρά παιδιά (Goswami & Brown, 1990; Πήττα κ.ά., υπό δημοσίευση.).

Σύμφωνα με τα αποτελέσματά μας, τα παιδιά είχαν πολύ καλύτερες επιδόσεις στο Ε1 (μη μαθηματικές αναλογίες) σε σχέση με κάθε ένα έργο μαθηματικών αναλογιών (Ε2, Ε3, Ε4). Αυτό ενδεχομένως οφείλεται στο γεγονός ότι οι οικείες, μη μαθηματικές σχέσεις των δοκιμών του Ε1 ήταν πιο εύκολο να αναγνωριστούν από τα παιδιά. Τα αποτελέσματά μας υποδεικνύουν επίσης ότι, για το δείγμα μας, η ικανότητα αναγνώρισης απλών μη μαθηματικών αναλογιών προηγείται σε σχέση με την αντίστοιχη ικανότητα για τις μαθηματικές αναλογίες. Πράγματι, δεν υπήρξε κανένα παιδί που να είχε καλύτερη επίδοση σε κάποιο από τα έργα Ε2, Ε3, Ε4, σε σχέση με την επίδοσή του στο Ε1. Το εύρημα αυτό δεν μπορεί, ασφαλώς να γενικευτεί, αλλά δείχνει μια κατεύθυνση που μπορεί να διερευνηθεί με μεγαλύτερο δείγμα, όσον αφορά το ακόμα ανοιχτό ερώτημα της σχέσης μεταξύ της αναλογικής σκέψης και της σκέψης κατ' αναλογία (Ham & Guderson, 2019).

Όπως αναμενόταν (Πήττα κ.ά., υπό δημοσίευση), διαπιστώθηκαν επίσης δι-ατομικές διαφορές ανάμεσα στα παιδιά, όσον αφορά την επίδοσή τους στα έργα με τις μαθηματικές αναλογίες. Στο δείγμα μας μπορούν να διακριθούν τρεις ομάδες παιδιών, ανάλογα με τις δοκιμές στις οποίες πέτυχαν στο σύνολο των 9 δοκιμών: Η ομάδα 3 παιδιών που πέτυχαν σε τουλάχιστον μισές από τις συνολικές δοκιμές, η ομάδα 5 παιδιών που πέτυχαν σε λιγότερες από τις μισές, αλλά σε περισσότερες από το ένα τέταρτο, και η ομάδα 4 παιδιών που πέτυχαν σε λιγότερο από το ένα τέταρτο των δοκιμών. Η καλύτερη επίδοση αντιστοιχούσε σε 6 επιτυχημένες δοκιμές, ενώ η λιγότερο καλή αντιστοιχούσε σε καμία επιτυχημένη δοκιμή.

Το είδος των ποσοτήτων μέσω των οποίων αναπαραστάθηκε η σχέση 1:2 φάνηκε να επηρεάζει την επίδοση των παιδιών. Η χαμηλότερη επίδοση παρατηρήθηκε στο Ε4, στο οποίο υπήρχαν διακριτές ποσότητες, ένα αποτέλεσμα που είναι σύμφωνο με την προϋπάρχουσα βιβλιογραφία (Singer-Freeman & Goswami, 2001). Η υψηλότερη επίδοση, ωστόσο, παρατηρήθηκε στο Ε3, όπου συνυπήρχαν συνεχείς και διακριτές ποσότητες. Ενδεχομένως αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα παιδιά σε αυτές τις δοκιμασίες είχαν εργαλεία στα χέρια τους όπως η άμεση αναγνώριση του πλήθους, καταμέτρηση και ο άξονας συμμετρίας ο οποίος υπήρχε με μαύρο χρώμα σε όλες τις σχετικές κάρτες.

Επισημαίνουμε ότι στο Ε3 εμφανίστηκε η μεγαλύτερη συστηματικότητα στις σωστές επιλογές, με 4 παιδιά να απαντούν σωστά σε όλες τις δοκιμές του. Δύο από αυτά τα παιδιά απάντησαν σωστά και σε όλες τις δοκιμές του Ε1. Κανένα από τα υπόλοιπα παιδιά δεν απάντησε συστηματικά σωστά σε κάποιο από τα τρία έργα, επομένως υπάρχουν ενδείξεις ενδο-ατομικών διαφορών, που ενδεχομένως οφείλονται στις παραμέτρους που μεταβάλλονταν στις δοκιμές, χωρίς να μπορεί να αποκλειστεί η πιθανότητα τυχαίας σωστής επιλογής σε κάποιες περιπτώσεις.

Όσον αφορά τις εξηγήσεις που έδωσαν τα παιδιά για τις επιλογές τους, αυτές διακρίθηκαν σε 3 κατηγορίες, με επικρατούσα αυτήν που περιλάμβανε μια ποικιλία μη ουσιαστικών εξηγήσεων, καθώς και της απουσίας εξήγησης. Το αποτέλεσμα αυτό είναι μάλλον αναμενόμενο, με δεδομένη την ηλικία των παιδιών. Επιπλέον, φάνηκε ότι δεν υπήρχε απαραίτητα σύνδεση ανάμεσα στις σωστές επιλογές, και σε πιο ουσιαστικές εξηγήσεις Μια δεύτερη κατηγορία εξηγήσεων αναφερόταν στο πλήθος ή την επιφάνεια ως απόλυτα μεγέθη και συνδεόταν κατά κύριο λόγο με λανθασμένες απαντήσεις. Οι εξηγήσεις της τρίτης κατηγορίας αναφέρονταν σε σχέσεις μεταξύ μεγεθών και αντιστοιχούσε τόσο σε σωστές, όσο και σε λανθασμένες απαντήσεις. Η πλειοψηφία των σχέσεων που διέκριναν τα παιδιά ήταν απλές σχέσεις διάταξης (περισσότερο/λιγότερο, «μεγαλύτερο/μικρότερο), σχέσεις διάταξης που προκύπτουν από προσθετική σύγκριση (π.χ., «ένα περισσότερο») και προσθετικές σχέσεις.

Τόσο το είδος των σχέσεων στις οποίες εστιάζουν τα παιδιά, καθώς και οι ποσότητες ανάμεσα στις οποίες αντιλαμβάνονται σχέσεις δεν ήταν απαραίτητα ευνοϊκές για την την αναγνώριση αναλογικών σχέσεων. Πράγματι, αναλύοντας τις λανθασμένες επιλογές των παιδιών, σε συνδυασμό με τις εξηγήσεις τους και τη συνολική τους συμπεριφορά, ανιχνεύτηκαν πιθανές στρατηγικές των παιδιών που ενδεχομένως οδηγούν σε λανθασμένες απαντήσεις. Κοινό στοιχείο αυτών των στρατηγικών είναι ότι τα παιδιά αγνοούν τη δεδομένη σχέση, όπως παρουσιάζεται στα παραδείγματα της κάθε δοκιμής και αναζητούν σχέσεις είτε ανάμεσα στο δεδομένο πρώτο όρο του ζητούμενου λόγου και τις εναλλακτικές, είτε ανάμεσα στις εναλλακτικές που τους δίνονται. Μια σχέση που φαίνονται να αναζητούν είναι σχέση ομοιότητας ανάμεσα στο δεδομένο πρώτο όρο και τις εναλλακτικές, Έτσι, στο Ε2, σε πολλές περιπτώσεις τα παιδιά προσπαθούσαν να διαλέξουν μια κάρτα, η οποία να έχει όσο το δυνατόν λιγότερο χρώμα, προκειμένου να μοιάζει περισσότερο στο σχήμα που τους δίνονταν ως ζητούμενο, το οποίο ήταν ολόλευκο. Παρόμοια, στο Ε4 τα παιδιά επέλεγαν με κριτήριο το πλήθος των κουκκίδων της επιλογής να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στο πλήθος των κουκκίδων του δεδομένου πρώτου όρου του λόγου. Για παράδειγμα, εάν δίναμε 2 κουκίδες να αντιστοιχούνται με 1 κουκίδα και ζητούσαμε το μισό των 4 κουκίδων, οι συμμετέχοντες δεν θα επέλεγαν τις 2 κουκίδες, αλλά τις 3, γιατί το 3 είναι πιο κοντά στο 4.

Τρία από τα παιδιά, όχι μόνο αναγνώρισαν ότι η επίμαχη σχέση ήταν το 1:2, αλλά το εξέφρασαν, είτε αναφερόμενα ρητά στο «μισό» στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων, είτε επικαλούμενα προσθετικές σχέσεις με όμοιους προσθετέους («ζευγαράκια») στην περίπτωση των διακριτών ποσοτήτων.

Συμπερασματικά, η αναγνώριση και διαχείριση απλών πολλαπλασιαστικών σχέσεων, ακόμη και της σχέσης 1:2, στο πλαίσιο έργων αναλογίας, ήταν απαιτητική για τα παιδιά της πρωτοσχολικής ηλικίας του δείγματός μας, με υπαρκτές, ωστόσο, δι-ατομικές διαφορές (βλ. και Πήττα κ. ά., υπό δημοσίευση). Πρέπει να σημειωθεί ότι τα συμπεράσματα δεν είναι γενικεύσιμα, δεδομένου του μικρού δείγματος. Περαιτέρω έρευνα μπορεί να εγκυροποιήσει τα συμπεράσματα αυτά.

Θα θέλαμε, τέλος, να επισημάνουμε ότι πως ίσως αν αντί μόνον να δείχναμε την σχέση μεταξύ δεδομένων, λέγαμε και τη λέξη «μισό» ,δηλαδή την ονοματίζαμε στα παιδιά, ενδεχομένως αυτά να εργάζονταν διαφορετικά πάνω στις απαντήσεις και τις επακόλουθες επεξηγήσεις τους. Αυτό όμως θα μπορούσε να γίνει καλύτερα κατανοητό πιθανόν μόνο μέσω μιας διδακτικής παρέμβασης, στην οποία θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί και μια διδασκαλία για το τι είναι το μισό, το οποίο κάποιοι συμμετέχοντες μπορεί να το είχαν ως γνώση και να μην μπορούσαν να το εκφράσουν λόγω του λειψού λεξιλογίου που συμπορεύεται με την ηλικία αυτή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Δ. Δεσλή, Ι. Παπαδόπουλος, Μ. Τζεκάκη (επιμ.). : Μαθηματικά με διάκριση και χωρίς διακρίσεις. *Πρακτικά του 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ* Θεσσαλονίκη

Ham, L., & Gunderson, E. A. (2019). Utilizing analogical reasoning to aid children's proportional reasoning understanding. *Journal of Numerical Cognition*, *5*(2), 140-157.

Karen E. Singer-Freeman & Goswami U, (2011) Does half a pizza equal half a box of chocolates? proportional matching in an analogy task,

Lamon 2006, όπως αναφέρεται από Van de Walle, J., Karp, Bay-Williams (2017). Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο, Διδασκαλεία με επίκεντρο το παιδί και την Ανάπτυξή του. Αθήνα: *Εκδόσεις Gutenberg* Τριαντάφυλλος Τριανταφυλλίδης (επιμέλεια), Άρτεμις Γρίβα (μετάφραση)

McCrink, K., & Spelke, E. S. (2016). Non-symbolic division in childhood.*journal of Experimental Child Psychology*, *142*, 66-82Mix, K.S., Huttenlocher, J., & Levine, S. (2002). Quantitative development in infancy and early childhood. New York: Oxford University Press.

Μοδέστου Μ.Σ. (2007), Μαθηματική αναλογική σκέψη: ένα πολυδιάστατο γνωστικό μοντέλο. Πανεπιστήμιο Κύπρου, Σχολή Κοινωνικών Επιστημών και Επιστημών Αγωγής

Πήττα, Γ., Καλδρυμίδου, Μ., & Βαμβακούση, Ξ. (υπό δημοσίευση). Υποστηρίζοντας την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης των νηπίων: μια μελέτη περίπτωσης. Στα *Πρακτικά του 8ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.).*

Reese H.W,(1996) Advances in child development and behaviour- Volume 26. Ανακτήθηκε 7 Ιουλίου ,2020 από https://books.google.gr/books?hl=el&lr=&id=OBwltucS6mUC&oi=fnd&pg=PA91&dq=goswami+cognitive+development&ots=ccSV5qFGE_&sig=jT24Aa2apTF0JVq386A6JQnZexo&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

Robinson, K. M., Osana, H. P., & Kotsopoulos, D. (Eds.). (2019). Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood: Integrating Interdisciplinary Research Into Practice. Springer.

Singer J.A, Kohn A.S, and Resnick L.B, (1997) Knowing about proportions in different contexts

Singer, J.A., Resnick, L.B. Representations of proportional relationships: Are children part-part or part-whole reasoners?. *Educ Stud Math* **23,** 231–246 (1992). https://doi.org/10.1007/BF02309531

Spinillo, A. G., & Bryant, P. E. (1999). Proportional reasoning in young children: Part-part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition*, *5*(2), 181-197.

Van de Walle, J., Karp, Bay-Williams (2017). Μαθηματικά από το Νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο, Διδασκαλεία με επίκεντρο το παιδί και την Ανάπτυξή του. Αθήνα: *Εκδόσεις Gutenberg* Τριαντάφυλλος Τριανταφυλλίδης (επιμέλεια), Άρτεμις Γρίβα (μετάφραση)

Van Dooren, W., Vamvakoussi, X., & Verschaffel, L. (2018). Educational Practices Series 30: Proportional reasoning. Brussels, Belgium & Geneva, Switzerland: International Academy of Education (IAE), International Bureau of Education (IBE—UNESCO).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α
ΚΩΔΙΚΟΙ ΤΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ ΑΝΑ ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΔΟΚΙΜΗ

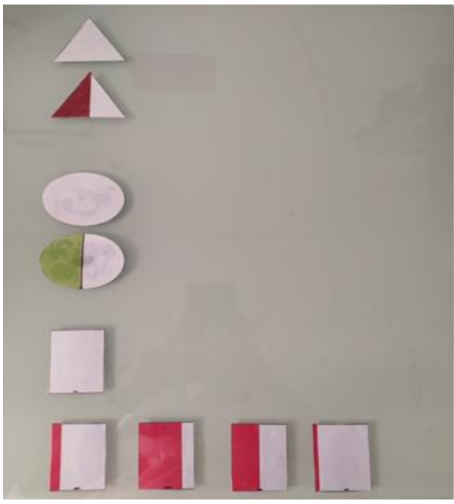
ΈΡΓΟ 1

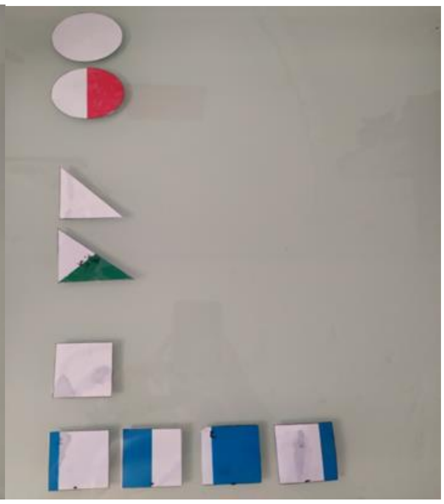
Εικόνα 1.1. Έργο 1, Δοκιμή 1

Εικόνα 1.2. Έργο 1, Δοκιμή 2

Εικόνα 1.3. Έργο 1, Δοκιμή 3

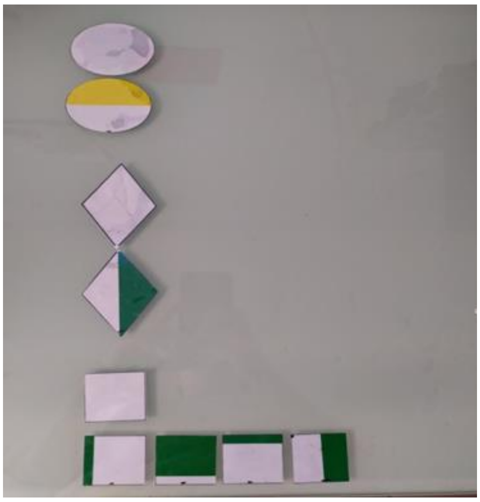
ΈΡΓΟ 2





1	2	3	4	1	2	3	4

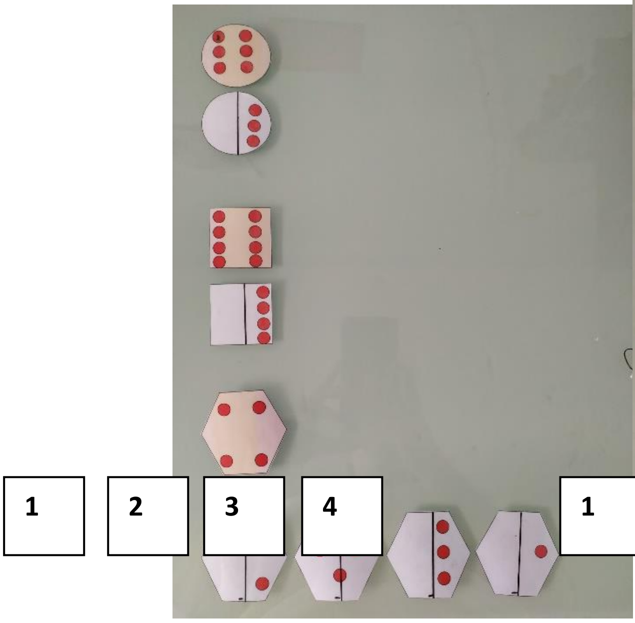
Εικόνα 2.1. Έργο 2, Δοκιμή 1Εικόνα 2.2. Έργο 2, Δοκιμή 2

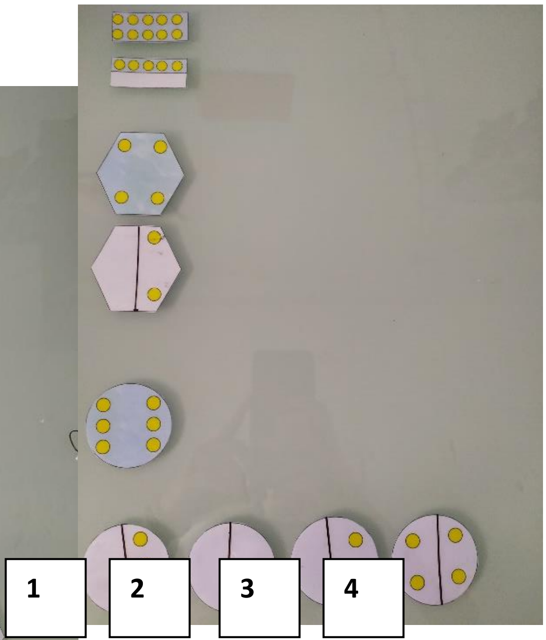


1	2	3	4

Εικόνα 2.3: Έργο 2, Δοκιμή 3

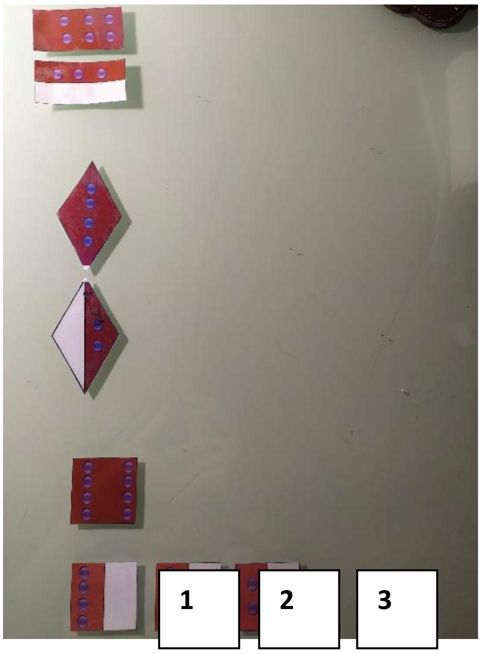
ΈΡΓΟ 3





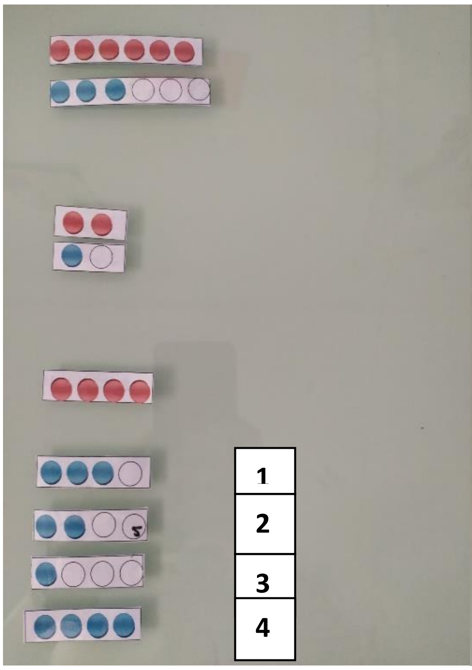
Εικόνα 3.1. Έργο 3, Δοκιμή 1

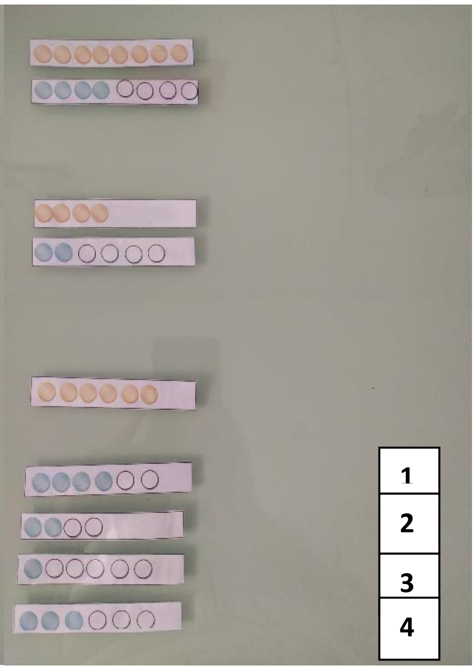
Εικόνα 3.2. Έργο 3, Δοκιμή 2



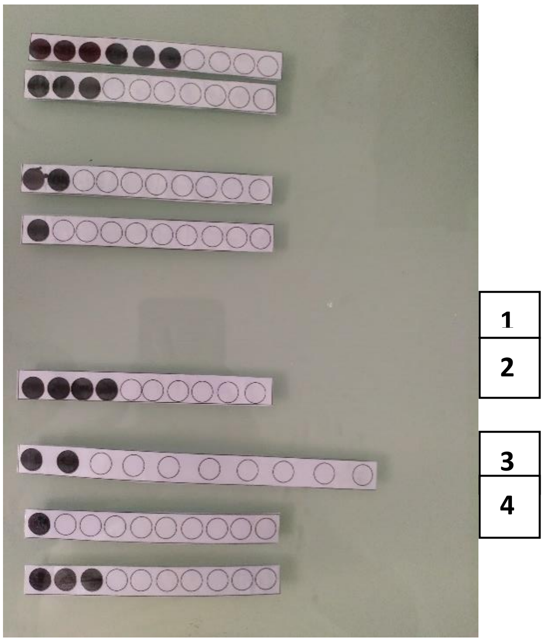
Εικόνα 3.3: Έργο 3, Δοκιμή 3

ΕΡΓΟ 4





Εικόνα 4.1: Έργο 4, Δοκιμή 1 *Εικόνα 4.2: Έργο 4, Δοκιμή 2*



Εικόνα 4.3: Έργο 4, Δοκιμή 3

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β
ΚΑΤΑΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΕΠΙΛΟΓΩΝ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ ΑΝΑ ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΑΝΑ ΔΟΚΙΜΗ

ΠΑΙΔΙ	ΕΡΓΟ 1^{Ο}			ΕΡΓΟ 2^{Ο}			ΕΡΓΟ 3^{Ο}			ΕΡΓΟ 4^{Ο}		
	1.1	**1.2**	**1.3**	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**4.1**	**4.2**	**4.3**
Π1	4	3	3	3	4	1	1	1	1	1	1	3
Π2	4	3	4	1	1	1	1	4	1	2	4	3
Π3	4	3	3	3	2	4	1	1	1	1	1	3
Π4	4	2	3	4	1	3	4	2	1	1	4	3
Π5	4	3	3	4	1	1	1	1	1	4	4	3
Π6	4	2	3	4	4	3	2	1	2	1	1	3
Π7	4	3	3	4	1	1	4	2	2	1	2	3
Π8	4	3	3	3	4	4	3	1	1	4	3	1
Π9	4	2	3	3	4	4	2	4	2	1	4	3
Π10	4	3	3	4	4	3	2	4	1	3	4	1
Π11	4	3	3	4	1	3	4	4	2	4	1	3
Π12	4	3	3	3	2	4	1	1	1	4	1	3
Π13	3	2	3	4	1	1	2	4	1	4	1	3

Σημείωση:
Με κίτρινο χρώμα σημαίνεται η σωστή επιλογή

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ
ΕΞΗΓΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ ΣΤΑ ΕΡΓΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ, ΑΝΑ ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΑΝΑ ΔΟΚΙΜΗ

ΕΡΓΟ 2^{Ο} Συνεχείς Ποσότητες			
ΠΑΙΔΙ	**2.1**	**2.2**	**2.3**
Π1	δεν έδωσε εξήγηση	δεν έδωσε εξήγηση	δεν έδωσε εξήγηση
Π2	είναι τετράγωνο	έχει το ίδιο σχήμα	έχει το ίδιο σχήμα
Π3	είναι σαν σημαία (1ο επίπεδο VanHeil)	γίνεται σαν λαιμός και μάτια	σαν ζώνη μίση πράσινη
Π4	είναι ολοκληρωμένο	είναι ολοκληρωμένο	είναι ολοκληρωμένο
Π5	έχει λίγο κόκκινο. Αυτό (δείχνει άλλη επιλογή) δεν έχει κόκκινο	έχει λίγο (δείχνει το χρώμα στην επιλογή)	έχει λίγο (δείχνει το χρώμα στην επιλογή
Π6	είναι ίδια	είναι ίδια	είναι ίδια
Π7	είναι όλο άσπρο και μια γραμμούλα κόκκινη	είναι μια μικρή γραμμούλα	έχει μια μικρή γραμμούλα
Π8	δεν ξέρω	είναι λίγο μπλε	δεν έδωσε εξήγηση
Π9	είναι άσπρο και κόκκινο	είναι άσπρο και μπλε	είναι πράσινο και άσπρο
Π10	αυτό είναι όλο άσπρο(δεδομένο) και αυτό είναι άσπρο (επιλογή)	αυτό είναι όλο άσπρο(δεδομένο) και αυτό είναι άσπρο (επιλογή)	γιατί είναι άσπρο
Π11	έχει μια μικρή γραμμή	έχει μια μικρή γραμμή. Αυτό δεν ταιριάζει με αυτό γιατί είναι πολύ(σύγκριση μεταξύ επιλογών)	έχει μια γραμμή
Π12	είναι το μισό	είναι μισό	είναι το μισό
Π13	έχει λίγο κόκκινο	έχει το πιο λίγο μπλε	έχει το πιο λίγο πράσινο

Σημείωση

Μη εξήγηση

Απόλυτο Μέγεθος

Σχέσεις μεταξύ Μεγεθών

ΠΑΙΔΙ	ΕΡΓΟ 3^{O} Συνεχείς/Διακριτές Ποσότητες		
	3.1	3.2	3.3
Π1	δεν έδωσε εξήγηση	δεν έδωσε εξήγηση	δεν έδωσε εξήγηση
Π2	δεν έχει περισσότερες βουλίτσες	δεν έδωσε εξήγηση	έχει το ίδιο σχήμα και τις ίδιες βουλίτσες. Δεν τα μέτρησε απλά τα είδε γιατί ήταν ίδια
Π3	ζάρι (ξεκίνησε να μου εξηγεί πως μοιάζει το ζάρι, έκανε απαρίθμηση τις βουλίτσες στις επιλογές) 2+2 = 4 η διαφορά είναι μια βούλα	είναι 3+3+3	είναι 4+4 = 8
Π4	είναι ολοκληρωμένο	είναι ολοκληρωμένο	είναι ολοκληρωμένο
Π5	αυτό έχει και 2 και 2 (δείχνει την επιλογή) και αυτό έχει δύο (δείχνει το δεδομένο)	3 και 3 κάνουν 6	αυτό είναι ίδιο
Π6	είναι ίδια	είναι ίδια	είναι ίδια έκανα ,αμπεμπαμπλόμ για αυτό
Π7	είναι ένα μπαλάκι	είναι 1	είναι 3
Π8	έτσι θέλει το γατί	δεν έδωσε εξήγηση	δεν ξέρω
Π9	έχει 3 μπαλίτσες . Ξέχασα τους αριθμούς.	έχει 4 μπαλίτσες	έχει 3 μπαλίτσες
Π10	το ένα είναι όλο άσπρο και το άλλο όλο μπεζ	δεν έδωσε εξήγηση	είναι όλο μωβ και καφέ
Π11	αυτό έχει μία ακόμη	έχει μια μπάλα ακόμα	έχει 1,2,3…. (απαρίθμηση) και αυτό 1,2,3…7 και αν ενώσουμε και άλλα 2 μαζί μας κάνει 7 και άλλο 1
Π12	δεν χρειάζεται να τα μετρήσω	είναι 3 και 3	έχει 4
Π13	αυτό έχει 1 περισσότερο από αυτό, ενώ αυτά έχουν λιγότερα	αυτό έχει 6 και αυτό έχει 4 και ταιριάζουνε γιατί έχουν λίγα παραπάνω	έχει περισσότερες μπάλες από αυτό και αυτό (σύγκριση μεταξύ των επιλογών)

Σημείωση

Μη εξήγηση

Απόλυτο Μέγεθος

Σχέσεις μεταξύ Μεγεθών

ΕΡΓΟ 4^{Ο} Διακριτές Ποσότητες			
ΠΑΙΔΙ	**4.1**	**4.2**	**4.3**
Π1	βλέπει τον αριθμό, βλέπει και τα άλλα(σύγκριση μεταξύ επιλογών)	έτσι (σε ερώτηση αν μέτρησε απάντησε όχι)	δεν έδωσε εξήγηση
Π2	έχει το ίδιο σχήμα	έχουν ίδιες βουλίτσες. Επισήμανε το χρώμα ως κριτήριο	δεν έδωσε εξήγηση
Π3	4+4=8	δεν έδωσε εξήγηση	δεν έδωσε εξήγηση
Π4	είναι ολοκληρωμένο	είναι ολοκληρωμένο	είναι ολοκληρωμένο
Π5	είναι ίδιο	είναι περίπου ίδια. Με δυο τελίτσες παραπάνω	έχει μια τελίτσα παραπάνω
Π6	είναι ίδια	είναι ίδια	είναι ίδια
Π7	είναι ένα αυτό που δεν είναι βαμμένο	είναι 2	είναι αυτά 3(επιλογή) και αυτά 4 (το δεδομένο)
Π8	δεν ξέρω	1,2,3…6. 6 βλέπω (καταμέτρηση)	είναι φωτόσπαθο (1ο επίπεδο VanHeile)
Π9	είναι 3 μπαλίτσες	έχει 3 μπαλίτσες	έχει 3 μπαλίτσες
Π10	δεν έδωσε εξήγηση	είναι ίδια	είναι ίδια
Π11	έχουν ίσες μπάλες	1,2…..7 (δεδομένο)και αυτό έχει 1,2..4 (επιλογή)και αυτό έχει 4.	είναι ίδια με μια παραπάνω μπαλίτσα
Π12	έχει 4	δεν ξέρω	δεν ξέρω
Π13	έχει όλες τις μπάλες χρωματισμένες	έχει περισσότερες μπάλες χρωματισμένες	έχουν το ίδιο μέγεθος και είναι με πιο πολλές μπαλίτσες

Σημείωση

Μη εξήγηση

Απόλυτο Μέγεθος

Σχέσεις μεταξύ Μεγεθών