

ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΕΣ (PATTERNING) ΣΤΙΣ ΜΙΚΡΕΣ ΗΛΙΚΙΕΣ

-

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΕΡΕΥΝΩΝ

Μαριάννα Τζεκάκη,¹ Ξένια Βαμβακούση², Μαρία Καλδρυμίδου³

¹Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, tzekaki@auth.gr

²Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, xvamvak@uoi.gr

³Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, mkaldrim@uoi.gr

Στην εισήγηση επιδιώκεται μια πρώτη συνθετική παρουσίαση των ερευνητικών αξόνων στους οποίους κινήθηκε η έρευνα σχετικά με τις κανονικότητες (patterning) στις ηλικίες 4-8, με συστηματοποίηση των βασικών ερευνητικών εννοιολογήσεων, τεκμηριώσεων, μεθοδολογιών και αποτελεσμάτων για αποτίμηση και κατευθύνσεις σε νέες σχετικές έρευνες.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο προβληματισμός για μια υψηλού επιπέδου μαθηματική εκπαίδευση στις μικρές ηλικίες (4 – 8 χρόνια) άρχισε ήδη από τη δεκαετία του '90. Την ίδια εποχή αρχίζει κι η συστηματική έρευνα για μελέτη δυνατοτήτων ανάπτυξης επίγνωσης για κανονικότητες και δομές, ως σημαντικό στοιχείο της μαθηματικής δραστηριότητας. Ο αγγλικός όρος 'pattern' αποδίδεται στα ελληνικά με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, εκ των οποίων οι όροι μοτίβο, πρότυπο και κανονικότητα έχουν χρησιμοποιηθεί στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης (βλ. τελευταία ελληνικά προγράμματα σπουδών, αντίστοιχα διεθνή). Υποστηρίζεται γενικά ότι η εξοικείωση με τις κανονικότητες και τις δομές είναι σημαντικές για τη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών με αναφορά στις ηλικίες 4 με 8 (Clements & Sarama, 2009) και αποτελούν βάση για την οργάνωση και την κατανόηση σύνθετων μαθηματικών καταστάσεων, αλλά και για τη γενίκευση σε μεγαλύτερες ηλικίες (Rivera, 2013).

Μέχρι σήμερα έχει πραγματοποιηθεί ένας μεγάλος αριθμός ερευνών σχετικών με την αξιοποίηση των κανονικοτήτων στη μαθηματική εκπαίδευση και για το λόγο αυτό στην εισήγηση επιδιώκουμε μια πρώτη συνθετική παρουσίαση των ερευνητικών αξόνων στους οποίους κινήθηκε η σχετική έρευνα. Από τους άξονες αυτούς στο κείμενο που ακολουθεί θα παρουσιαστούν (α) οι εννοιολογικοί προσδιορισμοί της έννοιας και των ειδών των κανονικοτήτων, (β) τεκμηριώσεις σύνδεσης με τη μαθηματική ανάπτυξη στους διαφορετικούς άξονες περιεχομένου (γ) έρευνες αναφορικά με τις ικανότητες και τις στρατηγικές ανάπτυξης κανονικοτήτων και δ) αποτίμηση και κατευθύνσεις για νέες έρευνες.

ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΙ

Κανονικότητες και πρότυπα

Ο ορισμός της κανονικότητας ή του προτύπου (pattern) δεν είναι απλός καθώς δεν αποτελεί μια διακριτή μαθηματική έννοια.

Ένας αρχικός προσδιορισμός περιγράφει το pattern ως μια διαδοχή στοιχείων ποικίλης φύσης (αριθμοί, σχήματα, ήχοι, σύμβολα) που οργανώνονται με βάση ένα κανόνα. Ο προσδιορισμός αυτός συνεπάγεται την κανονικότητα (regularity) και, άρα, την προβλεψιμότητα (predictability) (Papic, Mulligan, & Mitchelmore, 2011; Radford, 2008). Η φύση των στοιχείων του pattern είναι καθοριστική, κατά τον Liljedahl (2004), ο οποίος υποστηρίζει ότι η έννοια της κανονικότητας είναι ένας πρωταρχικός όρος που ορίζεται μέσα στο σύνολο των ειδικών μορφών κανονικοτήτων στο οποίο ανήκει (πχ. ηχητικές, χωρικές, αριθμητικές, κλπ.) και έχει χαρακτηριστικά που προσδιορίζονται εντός αυτού του συνόλου (για παράδειγμα ένα ηχητικό και ένα χωρικό μοτίβο, ακόμα κι αν έχουν την ίδια δομή ABB, είναι διαφορετικής φύσης).

Επεκτείνοντας την παραπάνω θεώρηση, οι Papic και άλλοι (2011) προσδιορίζουν τα patterns που αφορούν τα Μαθηματικά ως α) μια κανονικότητα σε ένα αντικείμενο, κάποια από τα στοιχεία του οποίου σχετίζονται με ένα συστηματικό τρόπο, β) ένα διατεταγμένο σύνολο αντικειμένων, κάθε στοιχείο του οποίου συνδέεται με το επόμενο με μια συγκεκριμένη σχέση, και γ) δύο διατεταγμένα σύνολα αντικειμένων, τα στοιχεία των οποίων βρίσκονται σε αντιστοιχία. Οι παραπάνω ερευνητές επεκτείνουν έτσι τη σχετική έννοια συμπεριλαμβάνοντας και στοιχεία που είναι οργανωμένα με βάση μια δομή (όπως πχ. ένα ρολόι), ενδογενή ή κατασκευασμένη ή εισαχθείσα από ένα μαθηματικό σύστημα (Mulligan, Mitchelmore, English, & Crevensten, 2013).

Συνθέτοντας τα παραπάνω γίνεται αντιληπτό ότι καταγράφονται διαφορετικές προσεγγίσεις στην έρευνα, αλλά τα θεμελιώδη συστατικά των κανονικοτήτων - προτύπων σε όλες τις θεωρήσεις, είναι οι σχέσεις μεταξύ των στοιχείων που τα αποτελούν και που είτε επιβάλλουν την οργάνωσή τους σε μια δομή, είτε επιτρέπουν την πρόβλεψη επόμενων όρων της διαδοχής τους (Radford, 2008; Rivera & Becker, 2009; Warren & Cooper, 2008).

Μορφές κανονικοτήτων

Υπάρχει μια ποικιλία κατηγοριών και όρων αναφορικά με τις δραστηριότητες στις κανονικότητες και πρότυπα που εμφανίζονται στη σχετική έρευνα.

Αναγνωρίζονται και αναφέρονται ευρέως από τους ερευνητές τρεις ειδικές μορφές patterns, τα επαναλαμβανόμενα, τα αναπτυσσόμενα ή τα patterns με μορφή σχέσης (Lünken, 2018; Mulligan, Mitchelmore, & Prescott, 2006; Threlfall, 1999). Όσον αφορά τα επαναλαμβανόμενα, περαιτέρω διάκριση γίνεται με βάση τον τύπο της μονάδας επανάληψης (π.χ. ABAB, ABAABA, Liljedahl, 2004; Papic et al., 2011; Threlfall, 1999), αλλά και τις παραμέτρους που μεταβάλλονται (π.χ. μόνο το σχήμα, ή σχήμα και μέγεθος, κ.λπ., Fyfe, Evans, Eisenband Matz, Hunt, & Alibali, 2017; Skoumpourdi, 2013). Όσον αφορά τα αναπτυσσόμενα, οι Rivera και Becker (2009)

τα ομαδοποιούν σε προσθετικά ή πολλαπλασιαστικά. Ο Rivera (2013) διακρίνει επίσης τα patterns ως προς τα στοιχεία τους σε αριθμητικές και γεωμετρικές μορφές, ενώ η Warren (2005) συμπεριλαμβάνει κανονικότητες με στοιχεία σε μορφή σχημάτων, χρωμάτων, κινήσεων, αίσθησης και ήχου (ιδιαίτερα για τις μικρές ηλικίες). Τα σχετικά αποτελέσματα σχετίζονται με αυτές τις δράσεις.

Στις μορφές αυτές οι Mulligan και άλλοι (2006) προσθέτουν αλγεβρικές μορφές (τριγωνικοί σχηματισμοί με αριθμούς), μετρικούς σχηματισμούς (με επανάληψη μοναδιαίων στοιχείων) και διαγράμματα, αλλά και δισδιάστατους ή τρισδιάστατους σχηματισμούς (Mulligan et al., 2013). Παρόμοια η Ma (2009) αναφέρεται σε εικονομορφικά πρότυπα (κυρίως γεωμετρικά) που οδηγούν στη διατύπωση λεκτικών κανόνων.

Στην κατηγορία αυτή οι Chua και Hoyles (2013) που μελετούν αντίστοιχα σχηματικές/εικονιστικές μορφές που οδηγούν σε αριθμητικές σχέσεις και παραπέμπουν σε κανόνες (τύπου συνάρτησης), διακρίνουν τις κατηγορίες τους με βάση τη μορφή των σχηματισμών αλλά και τον τύπο της συνάρτησης στον οποίο παραπέμπει η κάθε μορφή (πχ. κάποιοι οδηγούν σε τύπους γραμμικών συναρτήσεων, πχ. $5+3n$, ενώ άλλοι σε τύπους δευτεροβάθμιων συναρτήσεων, πχ. n^2+2n).

Από τα παραπάνω προκύπτει μια μεγάλη ποικίλα κατηγοριών στις σχετικές έρευνες, οι οποίες μπορούν να οργανωθούν στους ακόλουθους άξονες, με μαθηματικό κυρίως περιεχόμενο (δηλαδή χωρίς ηχητικά ή κινητικά πρότυπα) και σχετικούς συνδυασμούς: Περιεχόμενο ή φύση των στοιχείων του pattern (εικονομορφικές, σχηματικές, γεωμετρικές, μετρικές, αριθμητικές, αλγεβρικές, κ.ά.), Εξέλιξη (επαναλαμβανόμενες, αναπτυσσόμενες, αναπτυσσόμενες αναδρομικά, κ.ά.), Χωρικές διαστάσεις της εξέλιξης (πχ. μονοδιάστατο, δισδιάστατο, τρισδιάστατο), Δομή κανονικότητας (στα επαναλαμβανόμενα: AB, ABB, ABBA, κλπ. – στα αναπτυσσόμενα: αθροιστική, πολλαπλασιαστική, κ.ά.), Υλικά (χειραπτικά, εικονικά ή/και συμβολικά). Οι έρευνες πραγματοποιούνται σε κάποιες κατηγορίες.

Δραστηριότητες πάνω στις κανονικότητες

Στην ενότητα αυτή είναι σημαντικό να προστεθούν και οι προτεινόμενες από τους ερευνητές δραστηριότητες κανονικοτήτων που ξεκινούν από τις μικρότερες αλλά επεκτείνονται και στις μεγαλύτερες ηλικίες.

Για τις μικρές ηλικίες αναφέρονται έργα κανονικοτήτων που αφορούν αναπαραγωγή με αντιγραφή εξ όψεως ή χωρίς, συνέχιση ή επέκταση κανονικοτήτων και αναγνώριση δομικά όμοιων κανονικοτήτων. Στις δράσεις, προστέθηκαν η δημιουργία κανονικότητας (Papic, Mulligan & Mitchelmore, 2011), η εύρεση στοιχείου που λείπει (Warren, 2005), η αλλαγή υλικού (Clements & Sarama, 2009). Η εύρεση της μονάδας επανάληψης ή της μικρότερης μονάδας όπως και η περιγραφή της θεωρείται ιδιαίτερα σημαντική δράση από πολλούς ερευνητές (Mulligan, Mitchelmore, English, & Crevensten, 2013; Clements & Sarama, 2009), όπως και η πρόβλεψη μεταγενέστερων όρων, δηλαδή η (κοντινή ή μακρινή) γενίκευση (Ma, 2009). Οι δύο αυτές δράσεις, διάκριση μονάδας και πρόβλεψη όρων, καθώς και η σύνδεση αυτών με τη θέση τους θεωρούνται πολύ σημαντικές καθώς

οδηγούν σε γενικεύσεις και συμβολισμό (Michael, Elia, Gagatsis, Theoklitou, & Savva, 2006; Lannin, 2005). Η γενίκευση είναι σημαντική διάσταση τόσο για τα μεταγενέστερα αριθμητικά ή αναπτυσσόμενα patterns που οδηγούν σε τύπους, όσο και στις μικρότερες ηλικίες σε λεκτικές εξηγήσεις (Lüken, Peter-Koop, & Kollhoff, 2014), ζωγραφιές ή άλλη μορφή συμβολισμού (Mulligan, et al., 2013).

Συνθέτοντας, στις έρευνες, οι δραστηριότητες των μαθητών με κάθε μορφής pattern περιλαμβάνουν τα ακόλουθα: *αντιγραφή, αναπαραγωγή, επέκταση, μεταφορά σε άλλο υλικό, αναγνώριση της μονάδας επανάληψης, αναγνώριση ίδιων μονάδων επανάληψης, εύρεση του στοιχείου που λείπει (παρεμβολή), εύρεση λάθους* (Wijns, Torbeyns, De Smedt, & Verschaffel, 2019), *γενίκευση* (εύρεση τύπου, εύρεση όρου σε συγκεκριμένη θέση, Lannin, 2005).

ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΩΝ ΜΕ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Όσοι ερευνητές ασχολούνται με τις κανονικότητες υποστηρίζουν ότι είναι σημαντικές καθώς «... τα Μαθηματικά είναι η επιστήμη και η γλώσσα των κανονικοτήτων» (Steen, 1990, σελ. 5, στο Fox, 2006) και η εξοικείωση με αυτές ενισχύσει τη μαθηματική σκέψη καθώς ασκεί στην ικανότητα εύρεσης κανόνων και δομών, τόσο σε καταστάσεις της καθημερινότητάς όσο και σε συμβολικά αντικείμενα ή σύμβολα, όπως είναι και τα στοιχεία της άλγεβρας (Vogel, 2005).

Γενικά, οι συνδέσεις που γίνονται με τα Μαθηματικά αφορούν τους αριθμούς (π.χ. επαναλαμβανόμενη δομή δεκαδικού συστήματος, αθροιστικές και πολλαπλασιαστικές δομές), τη γεωμετρία (π.χ. κανονικά σχήματα), τις μετρήσεις (π.χ. δημιουργία και επανάληψη μονάδας μέτρησης) και την επεξεργασία δεδομένων (π.χ. εύρεση κανόνων και σχέσεων) (Lüken, 2018; Mulligan, Mitchelmore & Prescott, 2006). Η σύνδεση με την αλγεβρική σκέψη (Fox, 2006) όπως και με τις συναρτήσεις (Warren, 2005) αποτελεί έναν άλλο άξονα, στον οποίο έχουν δουλέψει πολλοί ερευνητές (βλ. Μα, 2009; Papic et al., 2011). Γενικότερα, είναι κοινή θέση ότι ο σχηματισμός γενικεύσεων, αφαιρέσεων και συμβολισμού που εμπλέκουν οι δραστηριότητες στις κανονικότητες και τα πρότυπα αποτελούν απαραίτητο στοιχείο της μαθηματικοποίησης (Lüken et al., 2014).

Αρκετές έρευνες έχουν επικεντρωθεί στη διερεύνηση της σύνδεσης των επιδόσεων στις κανονικότητες με τις επιδόσεις σε άλλους μαθηματικούς τομείς (π.χ. αριθμητική) ή άλλες γνωστικές ικανότητες (π.χ. ανάγνωση, μνήμη κλπ., Fyfe κ.ά., 2017). Κάποιες επίσης διερευνούν κατά πόσο οι υψηλές επιδόσεις στο patterning αποτελεί προβλεπτικό παράγοντα μεταγενέστερων μαθηματικών επιδόσεων (Rittle-Johnson, Zippert, & Boice, 2016).

Συνθέτοντας τα παραπάνω, διαφαίνεται ότι διαφορετικές μορφές και δράσεις με κανονικότητες υποστηρίζουν διαφορετικές πτυχές των μαθηματικών εννοιών. Έτσι, τα *επαναλαμβανόμενα μοτίβα* (με βασικό χαρακτηριστικό τον κυκλικό χαρακτήρα και τη μονάδα επανάληψης) και οι *δράσεις* που ζητούν συνέχεια, συμπλήρωση, εύρεση στοιχείου που λείπει, εύρεση λάθους, εύρεση μονάδας επανάληψης κλπ. μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να προσεγγίσουν μαθηματικά αντικείμενα ή διεργασίες που παρουσιάζουν συστηματικά επαναλαμβανόμενα φαινόμενα, όπως τα συστήματα αρίθμησης, οι κανονικότητες

στα σχήματα, η επανάληψη μονάδων στη μέτρηση κ.ά. (Liljedahl, 2004), η γενίκευση και ο συμβολισμός σε σημαντικές μαθηματικές ενότητες όπως πχ. η επίλυση ενός προβλήματος (Rivera & Becker, 2009; Radford, 2008) ή οι εξισώσεις (McNeil & Alibali, 2005). Αντίστοιχα, οι αριθμητικές κανονικότητες και οι δράσεις που δεν ζητούν μόνο να βρεθούν κάποια επόμενα στοιχεία ή ο τύπος/συνάρτηση που τα παράγει (πχ. μια αριθμητική διαδοχή 1, 5, 8, ..), αλλά κάποιο/α στοιχείο/α της κανονικότητας που βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη θέση, υποστηρίζει, ακόμα και από τις μικρότερες ηλικίες, την συναρτησιακή σκέψη.

ΙΚΑΝΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΩΝ

Η αναγνώριση ότι οι μικροί μαθητές (4-8 έτη, νηπιαγωγείο και Α' και Β' Δημοτικού) διαθέτουν την ικανότητα ανάπτυξης κανονικοτήτων είναι κοινός τόπος στο σύνολο της βιβλιογραφίας. Τα ευρήματα των ερευνών για τις επιδόσεις των παιδιών σε έργα που εμπλέκουν κανονικότητες αναδεικνύουν τα βασικά είδη κανονικοτήτων και τα είδη των δράσεων που τα μικρά παιδιά αντιμετωπίζουν με επιτυχία, χωρίς ειδική διδακτική προσέγγιση. Γενικά, ακόμα και παιδιά προσχολικής ηλικίας είναι σε θέση να εξερευνήσουν επαναλαμβανόμενα πρότυπα, γλωσσικά πρότυπα και κάποια γραμμικά κατά τη διάρκεια των ελεύθερων δραστηριοτήτων τους (Fox, 2006; Waters, 2004) και να αντιλαμβάνονται την κανονικότητα σε ένα μοτίβο (Lüken, 2018).

Το μεγαλύτερο μέρος των ερευνών στις μικρές ηλικίες επικεντρώνεται στη διερεύνηση των επιδόσεων σε επαναλαμβανόμενα πρότυπα, όπου διαπιστώνεται η ικανότητα της πλειοψηφίας των παιδιών να αναπαράγουν, να συνεχίζουν και να δημιουργούν ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο τύπου AB ή ABΓ (βλ. π.χ. Skoumpourdi, 2013; Παπαδοπούλου, 2010; Warren & Cooper, 2008). Πιο σύνθετες μορφές, ακόμα και αυτή του τύπου ABB, φαίνεται να προκαλούν μεγαλύτερες δυσκολίες, ενώ το υλικό από το οποίο αποτελείται το pattern δεν φαίνεται να επηρεάζει σημαντικά. Ωστόσο, η ανάλυση του pattern στα δομικά στοιχεία του και ο εντοπισμός της μονάδας επανάληψης αναδεικνύεται πιο απαιτητικό ζήτημα, γεγονός που οδήγησε τους ερευνητές να θεωρήσουν ότι ο εντοπισμός της μονάδας επανάληψης αποτελεί μαζί με τη συμπλήρωση (εύρεση του στοιχείου που λείπει), και την αναγνώριση (ποια patterns είναι ίδια; είναι αυτό ένα pattern;) σε ανώτερο επίπεδο της ανάπτυξης της αντίστοιχης ικανότητας (Wijns et al., 2019).

Τα αναπτυσσόμενα patterns, που αποτελούν μια πρώιμη εισαγωγή στη συναρτησιακή σκέψη, φαίνεται να αποτελούν πιο απαιτητικό πεδίο, με αποτέλεσμα στις μικρότερες ηλικίες να δίνεται λιγότερη έμφαση. Αν και οι επιδόσεις των μικρών παιδιών δεν έχουν μελετηθεί συστηματικά (οι έρευνες αφορούν κυρίως παιδιά των τελευταίων τάξεων του Δημοτικού σχολείου και των πρώτων τάξεων του Γυμνασίου), φαίνεται ότι σε αυτό το πεδίο καθοριστικό ρόλο παίζει το υλικό και η δομή (μονοδιάστατη ή δισδιάστατη αύξηση). Αρκετοί ερευνητές επισημαίνουν ότι

παιδιά μέχρι Β' Δημοτικού, επιτυγχάνουν σε υψηλά ποσοστά σε επαναλαμβανόμενα patterns, αλλά λιγότερο σε αυξανόμενα γεωμετρικά ή αριθμητικά (Παπαδοπούλου, 2010; Warren, 2005; κ.ά.).

Σχετικά με τις κανονικότητες δόμησης αντικειμένων διαφόρων τύπων (Mulligan et al., 2013) έχει αναλυτικά μελετηθεί η αναπτυξιακή πορεία των μικρών παιδιών, μέσα από ένα συστηματικό πρόγραμμα δραστηριοτήτων, από το προ-δομικό, στο δομικό επίπεδο (ενδιάμεσα επίπεδα: αναδυόμενο και μερικώς δομικό). Η θεώρηση αυτή, φέρνει σε πρώτο επίπεδο τη σημασία των αναλυτικών προγραμμάτων και της διδασκαλίας, μια που πλήθος ερευνών -(που δεν εξετάζονται αναλυτικά στην παρούσα εργασία)- αναδεικνύει τη θετική επίδραση κατάλληλων διδακτικών παρεμβάσεων και προγραμμάτων.

ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΕΥΡΕΣΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΩΝ

Μελετώντας τις δράσεις των μαθητών με τις κανονικότητες κάποιοι ερευνητές μελέτησαν επίσης και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά στις μικρές ηλικίες. Μια θέση κοινής παραδοχής είναι ότι τα παιδιά σε δράσεις κυρίως αντιγραφής, αναπαραγωγής, επέκτασης ή μεταφοράς σε άλλο υλικό, κάνουν αντιστοιχίσεις ένα προς ένα στο προτεινόμενο πρότυπο ή μοντέλο ή ότι ακολουθούν μια ρυθμική προσέγγιση που στηρίζεται στη διαδοχή (η οποία όμως δεν μπορεί να οδηγήσει στη γενίκευση κατά τον Threlfall, 1999), όπως οι αντίστοιχες δράσεις με εύρεση της μονάδας επανάληψης ή το 'σπάσιμο σε κομμάτια' (Mulligan et al, 2013).

Οι Paric και άλλοι (2011) κατηγοριοποιούν τις στρατηγικές των παιδιών σε άμεση αντιστοίχιση, εναλλαγή, βασική μονάδα επανάληψης, ολοκληρωμένη μονάδα επανάληψης. Αντίστοιχα, η Lüken (2018), συνοψίζοντας σχετικά ευρήματα, καταγράφει πέντε στρατηγικές των μαθητών κατά την επίλυση δράσεων με κανονικότητες: στην 1^η δεν υπάρχει καμία αναφορά στο σχέδιο, εκτός από την ολιστική αναπαραγωγή του μοτίβου, στη 2^η υπάρχει επικέντρωση σε κάποια χαρακτηριστικά, στην 3^η γίνεται κάποια σύγκριση και ταξινόμηση, στην 4^η εστίαση στην διαδοχή, ενώ τελικά στην 5^η γίνεται επικέντρωση στη μονάδα επανάληψης. Κατά την ερευνήτρια μόνο η 5^η προσέγγιση μπορεί να αναγνωριστεί ως μαθηματική δραστηριότητα, με τις άλλες να αποτελούν αντιγραφές, μιμήσεις ή αναπαραγωγές χωρίς χαρακτηριστικά γενίκευσης και συμβολισμού.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Συνοψίζοντας την παραπάνω ανασκόπηση μπορούμε να επισημάνουμε τα παρακάτω ζητήματα. Αρχικά, το πλήθος των ερευνών που έχουν γίνει σχετικά με τα patterns είναι μεγάλο, με ποικίλο περιεχόμενο, στόχους, ερωτήματα και προσεγγίσεις, κι επίσης οι έννοιες και η ορολογία που χρησιμοποιούνται σε αυτές δεν είναι πάντα σαφώς ορισμένες. Για το λόγο αυτός σε επόμενες έρευνες θα απαιτηθεί προσοχή στη χρήση τους.

Οι συνθέσεις που παρουσιάστηκαν δείχνουν ότι οι κανονικότητες ή τα πρότυπα όπως και οι σχετικές δραστηριότητες μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως προς

πολλές διαστάσεις, άρα θα ήταν σημαντικό να πραγματοποιηθούν συνθετικές συγκρίσεις αλλά και συγκριτικές έρευνες επιδόσεων, όπως και συστηματική διερεύνηση της σύνδεσης συγκεκριμένων μορφών και δράσεων με το μαθηματικό περιεχόμενο και τις μαθηματικές ικανότητες που αυτές υποστηρίζουν, καθώς είναι φανερό ότι όλες οι κανονικότητες δεν οδηγούν σε μαθηματικές δράσεις και άρα στα Μαθηματικά. Διαφαίνεται επίσης ότι τα παιδιά από τις μικρότερες ηλικίες είναι γενικά ικανά να αναπτύξουν σημαντικές ικανότητες patterning, αλλά στην έρευνα δεν είναι διακριτή η σημασία της κάθε μίας, άρα στην ερευνητική ή διδακτική πράξη είναι απαραίτητο να είναι στην επίγνωση του ερευνητή/εκπαιδευτικού ποια τροχιά ανάπτυξης εξυπηρετεί κάθε περιεχόμενο, υλικό, δομή και/ή δράση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Chua, B. L., & Hoyles, C. (2013). Rethinking and researching task design in pattern generalization. In Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of PME, Vol. 2* (pp. 193- 200). Kiel, Germany: PME.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NY: Routledge.
- Cooper, J.T, & Warren, E. (2008). The effect of different representations on Years 3 to 5 students' ability to generalise. *ZDM, 40*, 23–37.
- Fox, J. (2006). Connecting algebraic development to mathematical patterning in early childhood. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of PME, Vol. 3* (pp. 89 - 96). Prague: PME.
- Fyfe, E., Evans, J., Eisenband Matz, L., Hunt, K., & Alibali, M. (2017). Relations between patterning skill and differing aspects of early mathematics knowledge. *Cognitive Development, 44*, 1-11.
- Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning, 7*(3), 231-258.
- Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: the distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 26*(3), 24-42.
- Lüken, M.M. (2018, in press). Is patterning a mathematical activity? – An analysis of young children's strategies in working with repeating. In *POEM 2018*, Kristiansand, Norway.
- Lüken, M.M., Peter-Koop, A., & Kollhoff, S. (2014). Influence of early repeating patterning ability on school mathematics learning. In Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S., & Allan, D. (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of PME and 36th of PME- NA, Vol. 4* (pp. 137 - 144). Vancouver, Canada: PME.

- Ma, H- L. (2009). Characterizing students' algebraic thinking in linear pattern with pictorial contents. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of PME, Vol. 4* (pp. 49 - 56). Thessaloniki, Greece: PME.
- McNeil, N. M., & Alibali, W. M. (2005). Why Won't You Change Your Mind? Knowledge of Operational Patterns Hinders Learning and Performance on Equations. *Child Development, Volume 76*, Number 4, 883 – 899.
- Michael, S., Elia, I., Gagatsis, A., Theoklitou, A., & Savva, A. (2006). Levels of understanding of patterns in multiple representation. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference PME, Vol. 4* (pp. 161 - 168). Prague: PME.
- Mulligan, J., Mitchelmore, M., & Prescott, A. (2006). Integrating concepts and processes in early mathematics: The Australian Pattern and Structure Mathematics Awareness Project (PASMAPP). In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of PME, Vol. 4* (pp. 209 - 216). Prague: PME.
- Mulligan J.T., Mitchelmore M.C., English L.D., Crevensten N. (2013) Reconceptualising Early Mathematics Learning: The Fundamental Role of Pattern and Structure. In English L., Mulligan J. (Eds.) *Reconceptualising Early Mathematics Learning. Advances in Mathematics Education* (pp. 47-66). Springer, Dordrecht.
- Παπαδοπούλου, Ε. (2012). Μια διδακτική παρέμβαση για την ανάπτυξη ικανοτήτων αναγνώρισης κανονικότητας σε παιδιά προσχολικής ηλικίας. *Παιδαγωγική Επιθεώρηση*, 53, 123 - 137.
- Papic, M., Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2011). Assessing the Development of Pre-schoolers' Mathematical Patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(3), 237-268.
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, 40, 83–96.
- Rittle-Johnson, B., Zippert, E. L., & Boice, K. L. (2019). The roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Childhood Research Quarterly*, 46, 166-178.
- Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2009). Visual templates in pattern generalization. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of PME, Vol. 4* (pp. 473 - 480). Thessaloniki, Greece: PME.

- Rivera, F. D. (2013). Pattern generalization processing of younger and older Students: similarities and differences. In Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of PME, Vol. 4* (pp. 97 - 104). Kiel, Germany: PME
- Skoumpourdi, C. (2013). Kindergartners' performance levels on patterning. *International Journal for Mathematics in Education, HMS IJME, 5*, (pp. 108-131).
- Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). London: Cassel.
- Vogel, R. (2005). Patterns – a fundamental idea of mathematical thinking and learning. *ZDM Vol. 37* (5), 445- 449.
- Waters, J.L. (2004) A Study of mathematical patterning in early childhood settings. In Putt, I., Faragher, R., & MacLean, M. (Eds.) *Mathematics education for the 3rd millennium: Towards 2010. The 27th Annual Conference of MERGA* (pp. 27 - 30). Townsville, Queensland, Australia.
- Warren, E. (2005). Young children's ability to generalize the pattern rule for growing patterns. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference PME, Vol. 4* (pp. 305- 312). Melbourne: PME.
- Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67*, 171 - 185
- Wijns N., Torbeyns J., De Smedt B., & Verschaffel L. (2019) Young Children's Patterning Competencies and Mathematical Development: A Review. In: Robinson K., Osana H., Kotsopoulos D. (Eds.) *Mathematical Learning and Cognition in Early Childhood*. Springer, Cham.