



## ΑΤΟΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΣΤΗΝ ΑΥΘΟΡΜΗΤΗ ΤΑΣΗ ΕΣΤΙΑΣΗΣ ΣΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΜΙΚΡΕΣ ΗΛΙΚΙΕΣ

**Ξένια Βαμβακούση\*, Λίνα Βράκα\*, Αγγελική Λιολιούση\*\* και Jake McMullen**

\*Παν/μιο Ιωαννίνων \*\* Παν/μιο Αθηνών \*\*\*University of Turku

xvamvak@cc.uoi.gr, lvraka@outlook.com.gr, ang\_lio@yahoo.gr, jamcmu@utu.fi

*Παρουσιάζουμε μια έρευνα στην οποία σχεδιάσαμε και δοκιμάσαμε δύο έργα με στόχο την εξέταση της αυθόρμητης (χωρίς καθοδήγηση) τάσης εστίασης σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων. Στην έρευνα συμμετείχαν 32 παιδιά του Νηπιαγωγείου και της Α' τάξης. Σε συμφωνία με προηγούμενες έρευνες, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές ως προς αυτό το χαρακτηριστικό. Συζητάμε τη σημασία των αποτελεσμάτων αυτών για τη μαθηματική εκπαίδευση στις μικρές ηλικίες.*

### ΤΑΣΕΙΣ ΑΥΘΟΡΜΗΤΗΣ ΕΣΤΙΑΣΗΣ

Τα τελευταία χρόνια υπάρχει ερευνητικό ενδιαφέρον για πρώιμους προγνωστικούς παράγοντες της κατανόησης των ρητών αριθμών (π.χ., Jordan κ.ά., 2013). Η *αυθόρμητη τάση εστίασης σε ποσοτικές σχέσεις* φαίνεται να είναι ένας τέτοιος παράγοντας (McMullen, Hannula-Sormunen, & Lehtinen, 2014).

Προπομπός της έρευνας για αυτήν την τάση είναι η έρευνα για την αυθόρμητη τάση εστίασης στην αριθμητικότητα (numerosity) (Hannula, Lepola, & Lehtinen, 2010). Ως τέτοια ορίζεται η τάση (ορισμένων) παιδιών να εστιάζουν την προσοχή τους στην αριθμητικότητα μιας κατάστασης, χωρίς εξωτερική καθοδήγηση. Σε μια σειρά μελετών, οι Hannula και συνεργάτες έδειξαν ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στην τάση αυτή ήδη από την προνηπιακή ηλικία. Επιπλέον, οι διαφορές αυτές στο νηπιαγωγείο προβλέπουν τις αριθμητικές ικανότητες των παιδιών μέχρι και δύο χρόνια αργότερα. Οι Hannula και συνεργάτες εξηγούν αυτό το εύρημα επικαλούμενοι την εξω-σχολική, μη καθοδηγούμενη τριβή με τα αριθμητικά χαρακτηριστικά καθημερινών καταστάσεων, από την οποία επωφελούνται περισσότερο τα παιδιά που έχουν αυτό το χαρακτηριστικό.

Οι McMullen και συνεργάτες (2014) διερεύνησαν την αντίστοιχη τάση εστίασης σε ποσοτικές σχέσεις, ορίζοντας τις τελευταίες ως «σχέσεις μεταξύ δυο αντικειμένων, συνόλων ή συμβόλων, οι οποίες μπορούν να ποσοτικοποιηθούν ως προς ένα ή περισσότερα μεγέθη» (σελ. 199). Με τον ευρύ αυτό ορισμό, ως ποσοτικές σχέσεις μπορούν να θεωρηθούν, μεταξύ άλλων, οι προσθετικές ή πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων (διακριτών ή συνεχών), ή μεταξύ αριθμών. Οι McMullen και συνεργάτες έδειξαν ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στην τάση των παιδιών να

εστιάζουν αυθόρμητα, χωρίς καθοδήγηση, σε τέτοιες σχέσεις ήδη στο νηπιαγωγείο. Επιπλέον, αυτές οι ατομικές διαφορές προβλέπουν την επίδοση των παιδιών στα κλάσματα τρία χρόνια αργότερα.

Μια σημαντική πρόκληση σε αυτό το χώρο έρευνας είναι ο σχεδιασμός κατάλληλων έργων. Τα έργα πρέπει να επιδέχονται αποκρίσεων οι οποίες δε βασίζονται στις υπό μελέτη σχέσεις. Επιπλέον, η προσοχή των παιδιών δεν πρέπει να κατευθύνεται προς τις υπό μελέτη σχέσεις. Τέλος, τα έργα πρέπει να είναι μέσα στις δυνατότητες των παιδιών.

Στην παρούσα έρευνα σχεδιάσαμε και ελέγξαμε δύο έργα που εξετάζουν την αυθόρμητη εστίαση σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Το έναυσμα για τη μελέτη αυτή δόθηκε από έναν περιορισμό της έρευνας των McMullen κ.ά. (2014). Συγκεκριμένα, στα έργα που χρησιμοποίησαν οι ερευνητές αυτοί, η αριθμητικότητα ανταγωνιζόταν τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις. Για παράδειγμα, στο ένα έργο δύο πανομοιότυποι λούτρινοι σκύλοι παρουσιάζονταν στα παιδιά με την πληροφορία ότι είναι φίλοι που θέλουν πάντα να κάνουν τα ίδια ακριβώς πράγματα, και «τώρα θέλουν να φάνε το ίδιο μεζεδάκι». Ο ερευνητής έδινε στο ένα σκυλί το «μεζεδάκι» του, και ζητούσε από το παιδί να κάνει το ίδιο για το άλλο σκυλί. Το «μεζεδάκι» ήταν ένας κυκλικός δίσκος από πλαστελίνη, χωρισμένο σε 2 ίσα μέρη για τον ερευνητή και σε 4 ίσα μέρη για το παιδί. Πολλά παιδιά εστίασαν στο πλήθος των κομματιών, και όχι στο σχετικό μέγεθός τους. Είναι γνωστό ότι, όταν τα παιδιά εξοικειώνονται με την απαρίθμηση, η επίδοσή τους σε έργα όπως αυτό της δίκαιης μοιρασιάς μειώνεται (Resnick & Singer, 1993). Η αριθμητικότητα, δηλαδή, μπορεί να λειτουργεί ως πολύ ισχυρός περισπασμός από τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις, κάτι που ενδεχομένως αλλοιώνει τα αποτελέσματα. Επιπλέον, με τέτοιου είδους έργα δεν μπορεί να διαχωριστεί η αυθόρμητη εστίαση στην αριθμητικότητα, από την αυθόρμητη εστίαση σε ποσοτικές σχέσεις, κάτι που θα ήταν χρήσιμο για τη μελέτη της ανάπτυξης των δύο τάσεων και της μεταξύ τους σχέσης.

Επομένως, στόχος μας ήταν ο σχεδιασμός έργων στα οποία η αριθμητικότητα δεν ανταγωνίζεται τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις και βασικό μας ερευνητικό ερώτημα ήταν κατά πόσο υφίστανται ατομικές διαφορές στην αυθόρμητη τάση εστίασης στις πολλαπλασιαστικές σχέσεις υπό αυτή τη συνθήκη.

## ΜΕΘΟΔΟΣ

### Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 15 παιδιά που φοιτούσαν σε ιδιωτικό νηπιαγωγείο των Ιωαννίνων (μέση ηλικία: 5,7 έτη) και 17 παιδιά που φοιτούσαν στην πρώτη τάξη δημόσιου δημοτικού σχολείου (μέση ηλικία: 6,9 έτη) στην περιοχή της Αθήνας.

## Ερευνητικά έργα και υλικά

Σχεδιάστηκαν 2 έργα, με 4 δοκιμές το καθένα. Το πρώτο έργο (E<sub>1</sub>) αφορούσε σχέσεις μεταξύ μηκών (1:2, 1:4) και ήταν πλαισιωμένο σε μια ιστορία. Περιληπτικά, το σενάριο ήθελε τον κεντρικό χαρακτήρα (πράσινη νεράιδα/πράσινο ξωτικό) να ετοιμάζει ένα μαγικό φίλτρο. Ένας δευτερεύων χαρακτήρας ανακατεύει τα αντικείμενα που χρειάζεται με άλλα. Υπάρχουν ωστόσο ασπρόμαυρες φωτογραφίες με τα ζητούμενα αντικείμενα από την περσινή χρονιά. Τα παιδιά καλούνταν να εντοπίσουν το ζητούμενο αντικείμενο, με βάση την ασπρόμαυρη φωτογραφία.

Κατασκευάστηκαν 5 αντικείμενα για την κάθε δοκιμή. Το ένα αντικείμενο λειτουργούσε ως αντικείμενο αναφοράς. Στα υπόλοιπα αντικείμενα, οι δύο διαστάσεις ήταν σταθερές, ενώ η τρίτη (μήκος) μεταβαλλόταν σε σχέση με αυτή του αντικειμένου αναφοράς (βλ. Εικόνα 1 για ένα παράδειγμα). Στη συνέχεια, τραβήχτηκαν ασπρόμαυρες φωτογραφίες του αντικειμένου αναφοράς και του ζητούμενου αντικειμένου για κάθε δοκιμή.



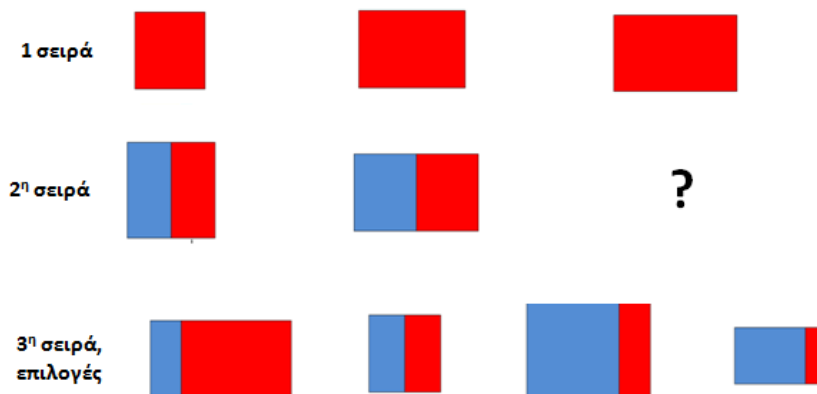
**Εικόνα 1: Τα αντικείμενα αναφοράς και επιλογής στην 1<sup>η</sup> δοκιμή του Έργου 1**

Στην 1<sup>η</sup> δοκιμή (*Συνταγή*), ζητούμενο αντικείμενο ήταν η συνταγή του φίλτρου, σε σχέση 1:2 με το αντικείμενο αναφοράς (το μαγικό ραβδί του χαρακτήρα, βλ. Εικόνα 1). Στη 2<sup>η</sup> δοκιμή (*Νερό*) ζητούμενο ήταν ένα ποτήρι με νερό πηγής, σε σχέση 1:4 με το δοχείο αναφοράς. Στην 3<sup>η</sup> δοκιμή, ζητούμενο ήταν ένα ποτήρι με χυμό από άγριο κεράσι, σε σχέση 1:2 με το δοχείο αναφοράς. Στην 4<sup>η</sup> δοκιμή, ζητούμενο ήταν το κομμάτι από ρίζα βελανιδιάς, σε σχέση 1:4 με το κλαδί αναφοράς.

Το σενάριο της ιστορίας, καθώς και ο ρόλος και τα χαρακτηριστικά των αντικειμένων επιλογής, δημιουργούν μια ποικιλία παραγόντων στους οποίους ενδέχεται να εστιαστεί η προσοχή των παιδιών, πέραν της υπό μελέτη σχέσης μεταξύ ζητούμενου αντικειμένου και αντικειμένου αναφοράς. Για παράδειγμα, η συμφωνία/ασυμφωνία του χρώματός των αντικειμένων με το αντικείμενο αναφοράς, η ύπαρξη λεπτομερειών σε κάποια από τα αντικείμενα που είναι ελκυστικές στα παιδιά αυτής της ηλικίας (π.χ. κεράσια σε κάποια από τα ποτήρια της 3<sup>ης</sup> δοκιμής), αλλά και

προσδοκίες σχετικά με το ρόλο των αντικειμένων βασισμένες στην εμπειρία (π.χ. οι ρίζες των δέντρων συνήθως απεικονίζονται με χρώμα καφέ).

Το δεύτερο έργο ( $E_2$ ) αφορούσε σχέσεις μεταξύ επιφανειών (1:2, 1:4). Ήταν πλαισιωμένο ως επιλογή σχημάτων για την κατασκευή μόμπιλο με γεωμετρικά σχήματα. Για κάθε δοκιμή, υπήρχε μια αρχική σειρά από 3 σχήματα από χαρτόνι, με κόκκινο χρώμα. Για τα δύο πρώτα σχήματα της δεύτερης σειράς, η πειραματίστρια διάλεγε ένα από μια συλλογή τεσσάρων σχημάτων με δύο χρώματα (κόκκινο, μπλε). Η σχέση της μπλε επιφάνειας με τη συνολική επιφάνεια του σχήματος ήταν διαφορετική σε κάθε επιλογή. Στην 1<sup>η</sup> και 3<sup>η</sup> δοκιμή, η πειραματίστρια διάλεγε τα σχήματα στα οποία η σχέση της μπλε επιφάνειας με τη συνολική επιφάνεια ήταν 1:2, ενώ στην 2<sup>η</sup> και 4<sup>η</sup> δοκιμή η σχέση ήταν 1:4. Τα παιδιά καλούνταν να επιλέξουν το τρίτο σχήμα της δεύτερης σειράς, ώστε να ταιριάζει με τα προηγούμενα (βλ. Εικόνα 2 για ένα παράδειγμα από την 3<sup>η</sup> δοκιμή).



**Εικόνα 2: Η 3<sup>η</sup> δοκιμή του Έργου 2**

Όπως και στο  $E_1$ , η επιλογή των παιδιών θα μπορούσε να βασιστεί σε διαφορετικά κριτήρια, πέραν της ζητούμενης σχέσης. Συγκεκριμένα, στην 1<sup>η</sup> δοκιμή, στα σχήματα που επέλεγε η πειραματίστρια ο προσανατολισμός της νοητής ευθείας που χώριζε τα σχήματα σε δύο μέρη ήταν κατακόρυφος και η μπλε επιφάνεια ήταν τοποθετημένη στα αριστερά. Στη 2<sup>η</sup> δοκιμή, ο προσανατολισμός ήταν οριζόντιος και η μπλε επιφάνεια ήταν τοποθετημένη στο πάνω μέρος. Στην 3<sup>η</sup> και 4<sup>η</sup> δοκιμή, τα σχήματα που επέλεγε η πειραματίστρια είχαν τα εξής χαρακτηριστικά: α) ταίριαζαν ως προς το σχήμα με το αντίστοιχο σχήμα της αρχικής σειράς (π.χ., αν το αρχικό σχήμα ήταν τετράγωνο, η επιλογή ήταν πάλι τετράγωνο), β) ήταν μεγαλύτερης επιφάνειας από το αρχικό σχήμα, γ) το απόλυτο μέγεθος της μπλε επιφάνειας αύξανε από το πρώτο στο δεύτερο σχήμα της δεύτερης σειράς.

Σε όλες τις δοκιμές του  $E_2$ , η επιλογή με βάση τη σχέση που αφηνόταν στο παιδί δεν είχε κανένα από τα παραπάνω χαρακτηριστικά (βλ. Εικόνα 3).

## Διαδικασία

Το κάθε παιδί εξετάστηκε ατομικά, σε γραφείο που βρισκόταν στο χώρο του σχολείου μετά από ενυπόγραφη άδεια από τους γονείς. Η διαδικασία είχε διάρκεια 20-30 λεπτά για κάθε παιδί και βιντεοσκοπήθηκε.

Δε δόθηκε καμία ένδειξη στα παιδιά για το μαθηματικό χαρακτήρα των έργων πριν και κατά τη διάρκεια του πειράματος. Όταν το παιδί έκανε την επιλογή του, η πειραματίστρια του ζητούσε να την εξηγήσει.

Πριν από το Έργο 1, η πειραματίστρια ζητούσε από τα παιδιά να επιλέξουν το χαρακτήρα της ιστορίας που θα ακολουθήσει, παρουσιάζοντας μια ζωγραφιά χρωματισμένη σε τόνους του πράσινου. Πριν από το Έργο 2, η πειραματίστρια παρουσίαζε μια φωτογραφία από ένα μόμπιλο και εξηγούσε πώς φτιάχνεται. Στη συνέχεια, έδειχνε στα παιδιά μια μαύρη κουκκίδα που υπήρχε στα σχήματα του έργου και διευκρίνιζε ότι αυτή η κουκκίδα έπρεπε να βρίσκεται πάντα στο πάνω μέρος του σχήματος, γιατί σε αυτό το σημείο θα περνούσε ο σπάγκος. Η διευκρίνιση αυτή ήταν σημαντική στην 1<sup>η</sup> και τη 2<sup>η</sup> δοκιμή του έργου, στις οποίες εμπλεκόταν ο προσανατολισμός.

Μετά το πέρας της διαδικασίας, η πειραματίστρια όρισε ως κριτήριο επιλογής την υπό μελέτη σχέση και ζήτησε από τα παιδιά να επιλέξουν βάσει αυτού του κριτηρίου στις δοκιμές στις οποίες δεν το είχαν κάνει ήδη. Με αυτές τις κατευθυνόμενες δοκιμές θέλαμε να ελέγξουμε κατά πόσο τα παιδιά αντιλαμβάνονται τις υπό μελέτη σχέσεις, εφόσον τους ζητηθεί.

## ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ως αποκρίσεις αυθόρμητης εστίασης στη σχέση (στο εξής, ΑΑΕΣ) θωρήθηκαν οι απαντήσεις των παιδιών που επέλεξαν το κατάλληλο αντικείμενο, ή που έδωσαν ενδείξεις στην εξήγηση και τη συμπεριφορά τους ότι παρατήρησαν την υπό μελέτη σχέση. Για παράδειγμα, ένα παιδί στη δοκιμή Μόμπιλο 3, αναζητώντας με κριτήριο το σχήμα, είπε «δεν έχει άλλο (ορθογώνιο) με μισό μπλε, μισό κόκκινο, γι' αυτό θα βάλω αυτό που είναι κάπως μισό». Στον Πίνακα 1 εμφανίζονται οι ΑΑΕΣ ανά έργο και δοκιμή.

Έργο	Δοκιμή (σχέση)	Νηπιαγωγείο (N=15)	1 <sup>η</sup> Τάξη (N=17)
1 (Φίλτρο)	Συνταγή (1:2)	1 6,7%	6 35,3%
	Νερό (1:4)	12 80,0%	12 70,6%
	Χυμός (1:2)	10 66,7%	10 58,8%
	Ρίζες (1:4)	6 40,0%	12 70,6%

2 (Μόμπιλο)	Μόμπιλο 1 (1:2)	11 73,3%	11 64,8%
	Μόμπιλο 2 (1:4)	4 26,7%	4 23,5%
	Μόμπιλο 3 (1:2)	8 53,3%	8 47,1%
	Μόμπιλο 4 (1:4)	7 46,7%	6 35,3%

**Πίνακας 1: Συχνότητα και ποσοστά ΑΑΕΣ ανά έργο και δοκιμή.**

Φαίνεται ότι η δοκιμή *Συνταγή* του Έργου 1 απέσπασε με μεγάλη διαφορά τις λιγότερες ΑΑΕΣ, ιδιαίτερα από τα μικρότερα παιδιά. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι η δοκιμή αυτή ακολουθούσε αμέσως μετά την παρουσίαση της ιστορίας και του χαρακτήρα της, ιδιαίτερα της ζωγραφιάς στην οποία ήταν έντονη η διάσταση του χρώματος (πράσινο). Από τις εξηγήσεις των παιδιών φάνηκε ότι αυτό επηρέασε την επιλογή του αντικειμένου (π.χ. «Είναι πράσινο ανοιχτό, όπως τα μαλλιά της νεράιδας»).

Στον Πίνακα 1 φαίνεται να μην υπάρχουν συστηματικές διαφορές μεταξύ των ηλικιακών ομάδων στο Έργο 1. Αντίθετα, στο Έργο 2 τα νήπια έδωσαν πιο συχνά ΑΑΕΣ σε όλες τις δοκιμές. Οι διαφορές ελέγχθηκαν με το πιθανολογικό κριτήριο Fisher's exact test και δε βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές, για καμία δοκιμή των δύο έργων. Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται οι μη ΑΑΕΣ και για τις δύο ηλικιακές ομάδες μαζί.

Στο Έργο 1, η συχνότερη μη ΑΑΕΣ και στις 4 δοκιμές ήταν η επιλογή της σχέσης που αντιστοιχούσε στο μικρότερο σε μήκος αντικείμενο. Λιγότερο συχνή, αλλά υπαρκτή, ήταν η επιλογή ανάμεσα στα δύο μεγαλύτερα σε μήκος αντικείμενα.

Έργο 1	Συνταγή		Νερό		Χυμός		Ρίζες	
	1:3	22 68,8%	1:8	5 15,6%	1:4	6 18,8%	1:8	7 21,9%
2:3	2 6,3%	1:2	1 3,1%	2:3	4 12,5%	1:2	5 15,6%	
3:4	1 3,1%	2:3	2 6,3%	3:4	2 6,3%	2:3	2 6,3%	
Έργο 2	Μόμπιλο 1		Μόμπιλο 2		Μόμπιλο 3		Μόμπιλο 4	
	1:4*	0 0%	1:8	8 25%	1:4	10 31,3%	1:8	2 6,3%

	1:4**	8 25%	1:2	8 25%	3:4*** (B)	3 9,4%	1:2	11 34,4%
	3:4	2 6,3%	3:4	6 18%	3:4**** (D)	2 6,3%	3:4	5 15,6%
			0	2 6,3%	0	1 3,1%	0	1 3,1%

\* Μπλε επιφάνεια στα αριστερά \*\* Μπλε επιφάνεια στο πάνω μέρος

\*\*\* Ορθογώνιο, ίδιο πλάτος με το αρχικό \*\*\*\*Ορθογώνιο, μεγαλύτερο πλάτος από το αρχικό

## Πίνακας 2: Συχνότητα και ποσοστά μη ΑΑΕΣ ανά έργο και δοκιμή.

Από τις 128 συνολικά εξηγήσεις που ζητήθηκαν στο Έργο 1, αξιοποιήσιμες ήταν οι 65 (50,8%). Μη αξιοποιήσιμες ήταν εξηγήσεις του τύπου «Γιατί το βλέπω!». Επί του συνόλου των αξιοποιήσιμων εξηγήσεων, οι 19 (29,2%) αναφέρονταν στα χαρακτηριστικά των αντικειμένων, όπως το χρώμα, τη συμφωνία χρώματος με το αντικείμενο αναφοράς (π.χ. «Γιατί είναι το ίδιο χρώμα όπως το κλαδί»), και το ρόλο τους (π.χ. «Γιατί είναι κόκκινο το φρούτο, το ποτήρι θα πρέπει να είναι κι αυτό κόκκινο»). Κοινό χαρακτηριστικό των υπόλοιπων εξηγήσεων ήταν η αναφορά στο μέγεθος των αντικειμένων. Σε ορισμένες (19, 29,2%) απλώς αναφερόταν το μέγεθος (π.χ., «Έχει το ίδιο ύψος με τη φωτογραφία»). Οι εξηγήσεις αυτού του τύπου συνόδευαν τόσο ΑΑΕΣ, όσο και μη ΑΑΕΣ. Σε άλλες αναφερόταν ρητά ως κριτήριο επιλογής το «μικρότερο» αντικείμενο (15, 23,1%) (π.χ., «Γιατί είναι το μικρότερο», «Γιατί είναι πολύ-πολύ μικρό») και συνόδευαν μη ΑΑΕΣ. Τέλος, σε 12 (18,5%) εξηγήσεις, τα παιδιά αναφέρονταν σε σχέσεις, κυρίως ανάμεσα στα 4 αντικείμενα επιλογής (π.χ., «Αυτό είναι πολύ μικρό, τα άλλα είναι πολύ μεγάλα. Αυτό είναι κάπως μεσαίο»). Οι εξηγήσεις αυτές συνόδευαν ΑΑΕΣ.

Όσον αφορά το Έργο 2, στη δοκιμή *Μόμπιλο 1*, η συχνότερη μη ΑΑΕΣ ήταν το σχήμα με τη μπλε επιφάνεια στα αριστερά (1:4), όπως και στα δύο άλλα σχήματα της σειράς. Αντίστοιχα, στο *Μόμπιλο 2*, ένα τέταρτο των παιδιών επέλεξε το σχήμα στο οποίο η μπλε επιφάνεια ήταν στο πάνω μέρος (1:2). Ωστόσο, το ίδιο ποσοστό παιδιών επέλεξαν το σχήμα που αντιστοιχούσε στη σχέση 1:8, δηλαδή το σχήμα με τη μικρότερη μπλε επιφάνεια.

Στη δοκιμή *Μόμπιλο 3*, η συχνότερη μη ΑΑΕΣ ήταν το αντικείμενο ίδιου σχήματος και πλάτους με το αρχικό (1:4). Τα ίδια χαρακτηριστικά είχε και η πιο συχνή μη ΑΑΕΣ στο *Μόμπιλο 4*.

Από τις 128 συνολικά εξηγήσεις που ζητήθηκαν στο Έργο 2, αξιοποιήσιμες ήταν οι 56 (43,75%). Επί του συνόλου των αξιοποιήσιμων εξηγήσεων, οι 21 (37,5%) αναφέρονταν στα σχήματα και τα χαρακτηριστικά τους (π.χ., «Είναι τετράγωνο», «Έχει το ίδιο ύψος»). Οι 10 (17,9%) αναφέρονταν στον προσανατολισμό (π.χ. «το μπλε είναι πάνω και το κόκκινο είναι κάτω»). Οι 12 (21,4%) αναφέρονταν στο μέγεθος της μπλε επιφάνειας (π.χ. «έχει πολύ

λίγο μπλε»). Τέλος, σε 13 εξηγήσεις (23,2%) αναφέρθηκαν εκφράσεις σχετικές με το μισό για να περιγραφεί η αντίστοιχη σχέση (π.χ. «είναι μισό μπλε, μισό κόκκινο»), οι οποίες προήλθαν από παιδιά του Νηπιαγωγείου.

Στον Πίνακα 3 φαίνεται η κατάταξη των παιδιών, ανάλογα με το πλήθος των ΑΑΕΣ στο σύνολο των δοκιμών κάθε έργου.

Έργο	Πλήθος ΑΑΕΣ							
	0	1	2	3	4	5	6	Σύνολο
1	2 6,3%	5 15,6%	12 37,5%	12 37,5%	1 3,1%			32 100%
2	5 15,6%	8 25,0%	8 25,0%	9 28,1%	2 6,3%			32 100%
1&2	0 0%	2 6,3%	2 6,3%	7 21,9%	8 25,0%	9 28,1%	4 12,5%	32 100%

### Πίνακας 3: Συνολικό πλήθος ΑΑΕΣ ανά έργο, και για τα 2 έργα συνδυαστικά

Βάσει του διωνυμικού κριτηρίου με παραμέτρους 4 (αριθμός δοκιμών) και 0,25 (πιθανότητα ΑΑΕΣ επιλογής), η επιλογή 3 ΑΑΕΣ είναι οριακά μη τυχαία ( $p=0,051$ ), ενώ η επιλογή 4 ΑΑΕΣ είναι μη τυχαία ( $p=0,004$ ). Από τα στοιχεία του Πίνακα 2 φαίνεται ότι 13 παιδιά (40,6%) και 11 παιδιά (34,4%) έδωσαν τουλάχιστον 3 ΑΑΕΣ στο Έργο 1 και στο Έργο 2, αντίστοιχα.

Εξετάζοντας το πλήθος των ΑΑΕΣ στις 8 δοκιμές των δύο έργων συνολικά, από τον Πίνακα 2 φαίνεται ότι 13 παιδιά (40,6%) έδωσαν τουλάχιστον 5 ΑΑΕΣ. Βάσει του διωνυμικού κριτηρίου με παραμέτρους 8 (αριθμός δοκιμών) και 0,25 (πιθανότητα ΑΑΕΣ επιλογής), η επιλογή 5 ή 6 ΑΑΕΣ είναι μη τυχαία ( $p=0,027$  και  $p=0,004$ , αντίστοιχα). Θέτοντας τον επιπλέον περιορισμό των τουλάχιστον δύο ΑΑΕΣ σε κάθε έργο ξεχωριστά, 11 παιδιά (34,4%) θεωρήθηκε ότι εστίασαν αυθόρμητα στις σχέσεις 1:2 και 1:4 και στις 8 δοκιμές των δύο έργων.

Σημειώνουμε ότι 29 παιδιά (90,6%) απάντησαν με βάση τις σχέσεις, είτε αυθόρμητα, είτε μετά την καθοδήγηση σε τουλάχιστον 5 από τις 8 δοκιμές, που σημαίνει ότι τα έργα ήταν μέσα στις δυνατότητές τους.

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην έρευνα αυτή σχεδιάσαμε και δοκιμάσαμε δύο έργα με στόχο τη εξέταση της αυθόρμητης εστίασης σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις στις μικρές ηλικίες. Από τις επιλογές και τις εξηγήσεις των παιδιών φαίνεται ότι τα έργα είχαν αρκετά εξω-μαθηματικά και μαθηματικά χαρακτηριστικά (π.χ. χρώμα και σχήμα στο  $E_1$  και  $E_2$ , αντίστοιχα) που λειτούργησαν ως επαρκής



περισπασμός, ώστε οι υπό μελέτη σχέσεις να μην είναι το μοναδικό χαρακτηριστικό της κατάστασης στο οποίο θα μπορούσαν να εστιάσουν τα παιδιά. Κρίνοντας από τα αποτελέσματα, υπάρχουν προσαρμογές που θα γίνουν στα έργα για μελλοντική χρήση. Συγκεκριμένα, η έγχρωμη εικόνα του χαρακτήρα στο  $E_1$  θα αποσυρθεί, καθώς φαίνεται ότι επηρέασε τα παιδιά να επιλέξουν βάσει του χρώματος στην πρώτη δοκιμή, με μεγάλη διαφορά σε σχέση με τα επόμενα. Επιπλέον, δεδομένου ότι τα παιδιά συχνά επέλεξαν το μικρότερο σε μήκος αντικείμενο ή τη μικρότερη μπλε επιφάνεια στα  $E_1$  και  $E_2$ , αντίστοιχα, θα ήταν χρήσιμο να υπάρχουν δύο επιλογές, οι οποίες να είναι μικρότερες σε μήκος ή επιφάνεια από το ζητούμενο.

Τα αποτελέσματά μας δείχνουν ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στη αυθόρμητη τάση των παιδιών να εστιάζουν σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις (McMullen et al., 2014). Περίπου το ένα τρίτο των παιδιών επέδειξαν αυτό το χαρακτηριστικό συστηματικά στις 8 δοκιμές. Για τα υπόλοιπα παιδιά δεν είναι δυνατόν να αποφανθούμε αν εστίασαν κάποιες φορές στις σχέσεις και κάποιες άλλες όχι, ή αν οι σποραδικές ΑΑΕΣ ήταν τυχαίες. Ωστόσο, σημειώνουμε ότι υπήρξαν 5 παιδιά (15,6%) τα οποία έδωσαν το πολύ 3 ΑΑΕΣ στις 8 δοκιμές. Κάποια από αυτά έδωσαν εξηγήσεις που έδειχναν ότι εστίαζαν συστηματικά σε άλλα κριτήρια πέραν των υπό μελέτη σχέσεων. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτά τα παιδιά συστηματικά δεν εστίασαν αυθόρμητα σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις.

Σημειώνουμε ότι, αντίθετα με τα αποτελέσματα των Mc Mullen κ.ά. (2014), δε βρήκαμε διαφορές ανάμεσα στις δύο ηλικιακές ομάδες. Επιπλέον, σε όλες τις δοκιμές του  $E_2$ , τα νήπια είχαν περισσότερες ΑΑΕΣ, ενώ χρησιμοποίησαν και εκφράσεις σχετικές με το μισό στις εξηγήσεις τους. Διερευνώντας το υπόβαθρο των παιδιών σχετικά με τα κλάσματα, διαπιστώσαμε ότι τα νήπια είχαν εκτεθεί σε διδασκαλία για το «μισό» αρκετούς μήνες πριν, με το μοντέλο του εμβადού. Αντίθετα, τα μεγαλύτερα παιδιά δεν είχαν παρόμοιες εμπειρίες. Το εύρημα αυτό δίνει έναυσμα για τη διαμόρφωση μιας υπόθεσης προς μελλοντική διερεύνηση. Πράγματι, μια πιθανή εξήγηση είναι ότι οι εμπειρίες με απλά κλάσματα επηρεάζουν την αυθόρμητη τάση των παιδιών να εστιάζουν στις αντίστοιχες σχέσεις, όταν αυτές εμφανίζονται σε ένα γνώσιμο πλαίσιο. Αυτό υποδεικνύει ότι, ενδεχομένως, η υπό μελέτη αυθόρμητη τάση μπορεί να ενισχυθεί στην προσχολική εκπαίδευση, παρόμοια με την αυθόρμητη τάση εστίασης στην αριθμητικότητα (Hannula, Mattinen, & Lehtinen, 2005). Περαιτέρω έρευνα προς την κατεύθυνση αυτή θα ήταν χρήσιμη.



## Βιβλιογραφία

- Jordan, N. C., Hansen, N., Fuchs, L. S., Siegler, R. S., Gersten, R., & Micklos, D. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *Journal of Experimental Child Psychology*, *116*(1), 45–58.
- Hannula, M.M., Lepola, J., & Lehtinen, E. (2010). Spontaneous focusing on numerosity as a domain-specific predictor of arithmetical skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, *107*, 394–406.
- Hannula, M. M., Mattinen, A., & Lehtinen, E. (2005). Does social interaction influence 3 year-old children's tendency to focus on numerosity? A quasi-experimental study in day-care. In L. Verschaffel, E. De Corte, G. Kanselaar, & M. Valcke (Eds.) *Powerful learning environments for promoting deep conceptual and strategic learning* (pp. 63–80). Leuven, Belgium: Leuven University Press.
- McMullen, J., Hannula-Sormunen, M.M., & Lehtinen, E. (2014). Spontaneous focusing on quantitative relations in the development of children's fraction knowledge. *Cognition and Instruction*, *32*, 198-218.
- Resnick, L. B., & Singer, J. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 107–130). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.