3ο Πανελλήνιο Συνέδριο με Διεθνή Συμμετοχή
«Εκπαιδευτικό υλικό Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών: διαφορετικές χρήσεις, διασταυρούμενες πορείες μάθησης»

Ρόδος, Παρασκευή 9, Σάββατο 10 και Κυριακή 11 Νοεμβρίου 2018

Πρακτικά Συνεδρίου

Επιμέλεια: Χρυσάνθη Σκουμπουρδή, Μιχαήλ Σκουμιός

Ρόδος 2018

Το Αναλυτικό Πρόγραμμα ως Εκπαιδευτικό Υλικό: το Παράδειγμα του Πολλαπλασιαστικού Εννοιολογικού Πεδίου

Ξένια Βαμβακούση[1] **και Μαρία Καλδρυμίδου**[2]

[1] Π.Τ.Ν, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, xvamvak@cc.uoi.gr
[2] Π.Τ.Ν, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, mkaldrim@uoi.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αυτή αποτελεί μια πρώτη προσπάθεια κριτικής και συνδυαστικής εξέτασης ενός αναλυτικού προγράμματος ως προς τη πραγμάτευση ενός σύνθετου δικτύου μαθηματικών ιδεών και, συγκεκριμένα, του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου στο πιλοτικό Αναλυτικό Πρόγραμμα του 2011, για το Νηπιαγωγείο, την Α΄ και τη Β΄ Δημοτικού. Πιο συγκεκριμένα εξετάζονται α) πού και με ποιο τρόπο εμφανίζονται ρητές αναφορές σε συστατικά στοιχεία του Πολλαπλασιαστικού Εννοιολογικού Πεδίου και β) πού υπάρχουν δυνατότητες αξιοποίησης του υπάρχοντος περιεχομένου του αναλυτικού για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης. Τέλος, επισημαίνονται σημεία που χρήζουν προσοχής: Σημεία στα οποία εμφανίζονται ασυνέπειες, ή σημεία στα οποία απαιτείται περισσότερη επεξεργασία, προκειμένου να μπορούν να αξιοποιηθούν στη διδακτική πράξη.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο, αναλυτικό πρόγραμμα*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο όρος «αναλυτικό πρόγραμμα» (εφεξής, ΑΠ) έχει πολλαπλές ερμηνείες (Clements, 2007). Στην εργασία αυτή αναφερόμαστε στο *διαθέσιμο αναλυτικό πρόγραμμα*, ένα έγγραφο που περιγράφει τη διάρθρωση του περιεχομένου και τους μαθησιακούς στόχους, με συνοδευτικό υλικό υπό τη μορφή προτεινόμενων δραστηριοτήτων, τα οποία μαζί υποστηρίζουν τους εκπαιδευτικούς στην οργάνωση της διδασκαλίας των μαθηματικών (ibid.). Αν και η εκπαιδευτική διαδικασία είναι ένα πολυσύνθετο φαινόμενο που δεν είναι δυνατόν να καθοριστεί πλήρως από το ΑΠ, παραμένει γεγονός ότι επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από αυτό, είτε μέσω της παραγωγής εκπαιδευτικού υλικού προσαρμοσμένου στο ΑΠ (π.χ. σχολικά εγχειρίδια), είτε από την απευθείας διάδραση των εκπαιδευτικών με το πρόγραμμα, ώστε οι ίδιο να παράξουν εκπαιδευτικό υλικό για την τάξη τους. Ως εκ τούτου, το ΑΠ αποτελεί βασικό εκπαιδευτικό υλικό.

Το διαθέσιμο ΑΠ είναι ένα κείμενο. Ως τέτοιο έχει μια γραμμική δομή που καθιστά δύσκολη τη πραγμάτευση σύνθετων δικτύων μαθηματικών ιδεών που διαχέονται σε διαφορετικές θεματικές ενότητες περιεχομένου. Ένα τέτοιο παράδειγμα, στο οποίο επικεντρωνόμαστε στην εργασία αυτή, είναι το πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο. Επιχειρούμε να εντοπίσουμε πώς αυτό το εννοιολογικό πεδίο αναπτύσσεται και διαρθρώνεται για την πρωτοσχολική ηλικία (από το Νηπιαγωγείο ως τη Β΄ Δημοτικού) στο πιλοτικό Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2011), εφεξής ΑΠ (2011). Στόχος μας είναι να αναδειχτούν οι δυνατότητες που, ρητά ή άρρητα, παρέχει το ΑΠ αυτό, καθώς και ορισμένα σημεία που χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής προκειμένου να υποστηριχτεί η αποτελεσματική αξιοποίησή του από τους εκπαιδευτικούς για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης. Σημειώνουμε ότι το ΑΠ (2011) είναι το πιο πρόσφατο ελληνικό ΑΠ και είναι συμβατό ως προς τις αρχές οργάνωσης και το περιεχόμενο με σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα διεθνώς. Επιπλέον, το ΑΠ αυτό «απευθύνεται άμεσα στον εκπαιδευτικό, θεωρώντας τον ως επιστήμονα που σχεδιάζει τη διδασκαλία του, κάνει επιλογές τεκμηριωμένες και έχει μια συνολική εικόνα της μαθησιακής πορείας των μαθητών του» (ΑΠ 2011, σελ. 1). Παρά το γεγονός ότι το ΑΠ (2011) δεν έχει ενταχθεί πλήρως στη σχολική πραγματικότητα, η ανάδειξη των δυνατοτήτων του και των περιορισμών του είναι χρήσιμη, τόσο για τους εκπαιδευτικούς που το συμβουλεύονται, όσο και για ενδεχόμενο σχεδιασμό μελλοντικού αναλυτικού.

ΠΟΛΛΑΣΙΑΣΤΙΚΟ ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Ο Vergnaud (1983) όρισε το εννοιολογικό πεδίο ως ένα σύνολο εννοιών και ένα σύνολο καταστάσεων στενά συνδεδεμένων μεταξύ τους, υπό την έννοια ότι μια έννοια νοηματοδοτείται στο πλαίσιο πολλών διαφορετικών καταστάσεων και, ταυτόχρονα, παραπάνω από μία έννοιες απαιτούνται για την ανάλυση μιας κατάστασης. Δύο παραδειγματικά εννοιολογικά πεδία έχουν μελετηθεί στη βιβλιογραφία, το προσθετικό και το πολλαπλασιαστικό πεδίο (εφεξής, ΠΕΠ).

Το προσθετικό πεδίο περιλαμβάνει έννοιες και καταστάσεις που σχετίζονται με την πρόσθεση και, μαζί, τις σχέσεις, τις ενέργειες και τις διαδικασίες που σχετίζονται με αυτές. Για παράδειγμα, οι φυσικοί αριθμοί, τα προβλήματα προσθετικής δομής, οι προσθετικές σχέσεις, η προσθετική ανάλυση/σύνθεση ποσοτήτων και αριθμών, η πρόσθεση/αφαίρεση εντάσσονται στο προσθετικό εννοιολογικό πεδίο. Θεμελιώδες στοιχείο του προσθετικού πεδίου είναι η καταμέτρηση (για την ποσοτικοποίηση του πλήθους).

Το ΠΕΠ περιλαμβάνει έννοιες και καταστάσεις που συνδέονται με τον πολλαπλασιασμό. Για παράδειγμα, οι ρητοί αριθμοί, τα προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής, οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις, η πολλαπλασιαστική σύνθεση/ανάλυση ποσοτήτων και αριθμών, ο πολλαπλασιασμός/διαίρεση, εντάσσονται στο πολλαπλασιαστικό εννοιολογικό πεδίο. Η καταγραφή αυτή δεν είναι, φυσικά, εξαντλητική. Μεταξύ άλλων, ουσιώδη συστατικά του ΠΕΠ, σύμφωνα με το Vergnaud (1983) είναι ο λόγος, η αναλογία, η γραμμική απεικόνιση, οι γραμμικές συναρτήσεις μιας ή περισσότερων μεταβλητών και η διαστατική ανάλυση (π.χ., η κατασκευή ν-διάστατων χώρων και των αντίστοιχων μεγεθών τους από χώρους μικρότερης διάστασης, όπως το επίπεδο από τις γραμμές και, αντίστοιχα, το εμβαδόν ως γινόμενο μηκών). Το ΠΕΠ, δηλαδή, εκτείνεται από τα στοιχειώδη έως και τα ανώτερα μαθηματικά και διαχέεται σε διαφορετικές θεματικές περιοχές (άλγεβρα, ανάλυση, γεωμετρία κλπ). Επιπλέον, το ΠΕΠ συνδέεται στενά με τη μέτρηση. Πράγματι, η μέτρηση συνεχών μεγεθών αποτελεί προνομιακό πεδίο προετοιμασίας για το πέρασμα από τους φυσικούς στους μη φυσικούς αριθμούς, καθώς συνήθως η επιλεγμένη μονάδα μέτρησης δεν εξασφαλίζει αποδεκτή ακρίβεια στο αποτέλεσμα. Επιπλέον, η μονάδα μέτρησης με την υπό μέτρηση ποσότητα βρίσκονται σε πολλαπλασιαστική σχέση (Π=κ.Μ).

Η διδακτική διαχείριση του ΠΕΠ συνεχίζει να αποτελεί μια πρόκληση, όχι μόνο στο πλαίσιο της τάξης, αλλά και όσον αφορά τη μακροπρόθεσμη οργάνωση και διάρθρωση του σχετικού περιεχομένου (Lamon, 2008). Σε μια παραδοσιακή οργάνωση αναλυτικού προγράμματος, το προσθετικό πεδίο προηγείται του πολλαπλασιαστικού. Πιο συγκεκριμένα, στην πρωτοσχολική εκπαίδευση δίνεται έμφαση στην ποσοτικοποίηση του πλήθους, με εργαλείο τους φυσικούς αριθμούς και κεντρική διαδικασία την καταμέτρηση με απλή μονάδα. Οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις εισάγονται μετά τις προσθετικές, καθώς θεωρούνται πιο απαιτητικές. Τέλος, οι μη φυσικοί αριθμοί (συγκεκριμένα, οι θετικοί ρητοί) εισάγονται πολύ αργότερα από τους φυσικούς (τυπικά, στην Γ΄ Δημοτικού, ή και αργότερα). Ας σημειωθεί, επιπλέον, ότι το προσθετικό πεδίο χρησιμοποιείται ως βάση για την κατασκευή ιδεών του πολλαπλασιαστικού πεδίου. Για παράδειγμα, ο πολλαπλασιασμός εισάγεται ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Τα κλάσματα τυπικά εισάγονται μέσω της ιδέα του μέρους-όλου που δίνει τη δυνατότητα να χρησιμοποιηθούν η καταμέτρηση με απλή μονάδα και οι προσθετικές σχέσεις (Moss, 2005). Η μέτρηση συνεχών μεγεθών συνήθως ανάγεται στην καταμέτρηση με απλή μονάδα, καθώς, ρητά ή άρρητα, το αριθμητικό αποτέλεσμα αναμένεται να βρίσκεται στο εύρος των αριθμών που γνωρίζουν τα παιδιά και η διαδικασία συνήθως είναι η επικάλυψη του μεγέθους με πολλές μονάδες και όχι η *επανάληψη της μονάδας* (Clements & Sarama, 2009).

Το ΠΕΠ είναι απαιτητικό πεδίο μάθησης. Χαρακτηριστικά παραδείγματα λαθών και παρανοήσεων των παιδιών που έχουν καταγραφεί στη βιβλιογραφία περιλαμβάνουν τα εξής α) Μαθητές διαφόρων ηλικιών αλλά και ενήλικες θεωρούν ότι ο «πολλαπλασιασμός μεγαλώνει πάντα τους αριθμούς» (Fischbein et al., 1985), β) Παιδιά Δημοτικού θεωρούν ότι το 3/4 και το 2/3 «είναι ίσα επειδή και τα δύο χρειάζονται ένα κομμάτι για να γίνουν ολόκληρα» (Moss, 2005), γ) Μαθητές Γυμνασίου απαντούν ότι αν τα 6κ. φράουλες χρειάζονται 3κ. ζάχαρη για να γίνουν μαρμελάδα, τότε τα 18κ. φράουλες χρειάζονται 15κ. (VanDooren et al., 2009), δ) Μικρά παιδιά, αφού εκτεθούν στην καταμέτρηση, θεωρούν ότι μια μοιρασιά είναι δίκαιη αν τα μερίδια είναι ισοπληθή, ανεξάρτητα από το μέγεθος των στοιχείων τους (Sophian, 2004) και ε) Σε καταστάσεις μέτρησης, για παράδειγμα μήκους, όπου έχουν χρησιμοποιηθεί δύο διαφορετικών μεγεθών ξυλάκια (π.χ. 3 μικρά και 3 μεγάλα), το 6 θεωρείται δεκτό ως αποτέλεσμα της μέτρησης (Clements & Sarama, 2009).

Τέτοιου είδους δυσκολίες μπορούν, σε μεγάλο βαθμό, να αποδοθούν στην εκπαίδευση και, πιο συγκεκριμένα, στον τρόπο με τον οποίο οργανώνεται η διδασκαλία με βάση την «παραδοσιακή» διάρθρωση του αναλυτικού προγράμματος. Τα παραπάνω παραδείγματα αυτά υποδεικνύουν ότι η ασυμμετρία στα πρωτοσχολικά χρόνια υπέρ του προσθετικού πεδίου έχει συνέπειες για τον τρόπο που τα παιδιά κατασκευάζουν ιδέες σχετικές με το ΠΕΠ (Vamvakoussi, Christou, & Vosniadou, 2018). Τα δύο τελευταία παραδείγματα δείχνουν επίσης ότι υπάρχουν περιορισμοί στον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζεται η καταμέτρηση στην πρωτοσχολική εκπαίδευση. Όπως επισημαίνει η Sophian (2004), η καταμέτρηση συνδέεται σχεδόν αποκλειστικά με καταστάσεις στις οποίες ζητείται το πλήθος των φυσικών αντικειμένων μιας συλλογής. Το γεγονός οδηγεί τα παιδιά να επικεντρώνονται στο πλήθος των φυσικών αντικειμένων σε καταστάσεις όπου αυτό δεν ενδείκνυται, παραμελώντας ουσιώδη στοιχεία, όπως ποιο είναι το υπό μέτρηση μέγεθος και ποια είναι η μονάδα μέτρησης. Η Sophian επισημαίνει την σημασία της έκθεσης των παιδιών σε μονάδες διαφορετικού τύπου (π.χ., σύνθετες μονάδες όπως 1 ζευγάρι παπούτσια).

Η τελευταία επισήμανση φέρνει στο προσκήνιο το σημαντικό ρόλο της μονάδας για το ΠΕΠ. Καταρχήν, ας σημειωθεί ότι σε οποιαδήποτε κατάσταση καταμέτρησης (είτε με απλή μονάδα-- π.χ. 1 παπούτσι-- είτε με σύνθετη μονάδα--π.χ. 1 ζευγάρι--) ή μέτρησης, η υπό (κατα)μέτρηση ποσότητα και η μονάδα βρίσκονται σε πολλαπλασιαστική σχέση. Επιπλέον, διαφορετικού τύπου μονάδες ενυπάρχουν σε μια πληθώρα πολλαπλασιαστικών καταστάσεων πέραν της συνήθους μέτρησης. Ας πάρουμε ως παράδειγμα μια συνθήκη στην οποία 20 αντικείμενα μοιράζονται δίκαια σε 5 άτομα και το κάθε άτομο παίρνει από 4 αντικείμενα (βλ. Confrey, 2008, για μια παρόμοια ανάλυση). Ανάλογα με το ζητούμενο, από τη συνθήκη αυτή μπορεί να προκύψουν 3 προβλήματα πολλαπλασιαστικής δομής. Αν το ζητούμενο είναι το μερίδιο, τότε απαιτείται **ισομερισμός** της διακριτής ποσότητας και το 1 μερίδιο αντιστοιχεί σε μια σύνθετη μονάδα (τα πολλά θεωρούνται ως ένα). Αν το ζητούμενο είναι το πλήθος των ατόμων, τότε απαιτείται **ομαδοποίηση** της ποσότητας σε 4-άδες (στην ουσία, **μέτρηση** της ποσότητας με σύνθετη μονάδα). Τέλος, αν το ζητούμενο είναι το σύνολο των αντικειμένων, τότε απαιτείται **επανάληψη** μιας ποσότητας (στην ουσία, επανάληψη της σύνθετης μονάδας).

Αξίζει να επισημανθεί ότι η παραπάνω ανάλυση δεν περιορίζεται στις διακριτές ποσότητες, αλλά συνεχίζει να ισχύει και στην περίπτωση των συνεχών. Ας πάρουμε σαν παράδειγμα μια συνθήκη στην οποία μια σοκολάτα μοιράζεται δίκαια σε 4 άτομα και καθένα παίρνει το κομμάτι που αντιστοιχεί στο 1/4 της σοκολάτας. Αν το ζητούμενο είναι το μερίδιο, τότε απαιτείται **ισομερισμός** της ποσότητας και το 1 μερίδιο αντιστοιχεί σε μια κλασματική μονάδα. Αν το ζητούμενο είναι το πλήθος των ατόμων, τότε απαιτείται **μέτρηση** της ποσότητας με την κλασματική μονάδα. Τέλος, αν το ζητούμενο είναι η συνολική ποσότητα, τότε απαιτείται **επανάληψη** της κλασματικής μονάδας. Οι συγκεκριμένες ενέργειες, δηλαδή, ο ισομερισμός, η μέτρηση με μονάδες διαφορετικού τύπου και η επανάληψης της ποσότητας, αποτελούν θεμελιώδη συστατικά του ΠΕΠ, και βάσεις της πολλαπλασιαστικής σκέψης (Hackenberg, 2010).

Η έρευνα στην περιοχή του ΠΕΠ, τόσο στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, όσο και στο χώρο της ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης των μικρών παιδιών, ανέδειξε σημαντικές πτυχές της πολλαπλασιαστικής σκέψης που είναι δυνατόν να υποστηριχθούν ήδη στην πρωτοσχολική εκπαίδευση (Clements & Sarama, 2009). Αυτό απαιτεί αναδιάρθρωση των αναλυτικών προγραμμάτων. Επιδράσεις αυτής της οπτικής αντανακλώνται στα αναλυτικά προγράμματος διεθνώς και είναι εμφανείς και στο ΑΠ (2011) για τις τάξεις που αντιστοιχούν στον Α΄ ηλικιακό κύκλο (Νηπιαγωγείο, Α΄, Β΄), τις οποίες μελετούμε. Εξετάζουμε α) πού και με ποιο τρόπο εμφανίζονται ρητές αναφορές σε συστατικά στοιχεία του ΠΕΠ και β) πού υπάρχουν δυνατότητες αξιοποίησης του υπάρχοντος περιεχομένου του αναλυτικού για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης. Τέλος, επισημαίνουμε σημεία που χρήζουν βαθύτερης επεξεργασίας, προκειμένου να μπορούν να αξιοποιηθούν στη διδακτική πράξη.

ΡΗΤΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ ΣΤΟ ΠΕΠ

Τα κεντρικά στοιχεία του ΠΕΠ αναφέρονται ρητά στο περιεχόμενο και τους μαθησιακούς στόχους της θεματικής ενότητας Αριθμοί, Πράξεις & Άλγεβρα (Ν΄) ή Αριθμοί (για την Α΄ και Β΄), η οποία διαχωρίζεται στις υποθεματικές Φυσικοί Αριθμοί (Α΄, Β΄:50 ώρες) και Κλασματικοί Αριθμοί (Α΄: 10 ώρες, Β΄:5 ώρες). Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται αναλυτικά το περιεχόμενο, οι στόχοι και η οργάνωσή τους ανά τάξη. Οι τίτλοι του περιεχομένου (1η στήλη) αντιστοιχούν στους τίτλους του ΑΠ (2011). Οι κωδικοί των στόχων που παρουσιάζονται στις στήλες 3-5 είναι οι αντίστοιχοι κωδικοί του ΑΠ (2011, σελ. 34-99). Όπου απαιτείται, το περιεχόμενο των στόχων (2η στήλη) διατυπώνεται σε γενική μορφή με τη χρήση του «ν» που αναφέρεται στο πεδίο των αριθμών που αντιστοιχούν σε κάθε τάξη και εξειδικεύεται στις στήλες 3-5. Το Χ σημαίνει την απουσία του αντίστοιχου στόχου σε κάποιες από τις τάξεις.

Βάσεις της πολλαπλασιαστικής σκέψης

Οι ενέργειες του ισομερισμού, της μέτρησης με μονάδες διαφορετικού τύπου και η επανάληψη ποσότητας εμφανίζονται ήδη από το Νηπιαγωγείο και συναντώνται και στην Α΄ και Β΄ τάξη. Ωστόσο, ο ισομερισμός, στο πλαίσιο των προβλημάτων πολλαπλασιαστικής δομής αναφέρεται ως «μοιρασιά» και περιορίζεται στις διακριτές ποσότητες (Ν΄:Αρ9, Α΄:Αρ13). Αντίθετα, στο πλαίσιο των κλασματικών αριθμών, ο ισομερισμός αναφέρεται ως «χωρισμός σε ίσα μέρη» (Α΄:Αρ15, Β΄:Αρ16) και αφορά και συνεχείς ποσότητες. Η διαφοροποίηση αυτή συσκοτίζει το γεγονός ότι στην ουσία πρόκειται για την ίδια μαθηματική ενέργεια και, ταυτόχρονα, αποκλείει από τις καταστάσεις μοιρασιάς τις συνεχείς ποσότητες, ιδιαίτερα στο Νηπιαγωγείο.

Εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι η μοιρασιά και η ομαδοποίηση αντιμετωπίζονται διαφορετικά ως προς το εύρος των αριθμών που εμπλέκονται. Για παράδειγμα, στο Νηπιαγωγείο η ομαδοποίηση γίνεται μέχρι και σε 5-άδες, ενώ η μοιρασιά περιορίζεται στα 2-3 μερίδια. Το ίδιο παρατηρείται και στην Α΄ Δημοτικού. Δεν είναι ξεκάθαρο ποιο είναι το σκεπτικό πίσω από αυτή την επιλογή.

Στη Β΄ Δημοτικού η ομαδοποίηση σε ν-άδες δεν αναφέρεται πια ρητά στους στόχους, αν και υπάρχουν νύξεις στις προτεινόμενες δραστηριότητες (ΑρΔ8, σελ. 93-94). Η επισήμανση αυτή συνδέεται με τον τρόπο με τον οποίο αναφέρεται ο όρος «πολλαπλασιαστικές καταστάσεις» στο ΑΠ που θα συζητηθεί παρακάτω.

Πίνακας 1: Περιεχόμενο και μαθησιακοί στόχοι πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου

Περιεχόμενο	Μαθησιακοί Στόχοι	Ν΄	Α΄	Β΄
Φυσικοί αριθμοί: Πολ/σμός	-Ομαδοποίηση σε ν-άδες και καταμέτρηση (πλήθος ομάδων, συνολικό πλήθος αντικειμένων)	ν=2,3,4, 5 Αρ8	ν=2,5,10 Αρ12	Χ
Διαίρεση Πολ/κές καταστάσεις	-Μοιρασιά σε ν-άδες και καταμέτρηση (πλήθος μεριδίου)	ν=2,3 Αρ9	ν=2,3 Αρ13	Χ
	-Εύρεση ν-πλάσιου και 1/ν αριθμού	Χ	ν=2 Αρ12	ν=2,4,5, 10 Αρ11
	-Τέλεια Διαίρεση: Εύρεση πηλίκου φυσικών αριθμών με ν	Χ	Χ	ν=2,4,5, 10 Αρ12
	Διερεύνηση πολλαπλασιαστικών καταστάσεων	Χ	Χ	Αρ14
Κλασματικοί αριθμοί	Σύγκριση ποσοτήτων με σχέση 1:ν και λεκτική έκφραση (πολλαπλάσιο/υποπολλαπλάσιο)	Χ	ν=2, 4 Αρ14	ν=3,6/ 5,10 Αρ17
	Σύγκριση ποσοτήτων με σχέση 1:ν και συμβολική έκφραση (συμβολικά: υποπολλαπλάσιο)	Χ	Χ	ν=3,6/ 5,10 Αρ17
	Χωρισμός εμπράγματων, διακριτών και συνεχών ποσοτήτων σε ν ίσα μέρη	Χ	ν=2,4,8/ 3,6/ 5, 10 Αρ15	ν=3,6,5, 10 Αρ16
	Διαισθητική προσέγγιση με εμπράγματες και εικονικές αναπαραστάσεις κλασμάτων (πέραν των κλασματικών μονάδων)	Χ	Χ	2/4, 3/4, 2/3 Αρ18

Πολλαπλασιαστικές σχέσεις

Η πιο ξεκάθαρη πραγμάτευση πολλαπλασιαστικών σχέσεων γίνεται στη θεματική των κλασματικών αριθμών. Εισάγονται μέσω σύγκρισης ποσοτήτων σε σχέση 1:2, 1:4 στην Α΄ Δημοτικού. Στη Β΄ Δημοτικού γίνεται επέκταση και σε άλλες σχέσεις, ενώ εισάγονται και συμβολικά εργαλεία (λεκτικά και αριθμητικά). Στη Β΄ τάξη εισάγονται, επιπλέον, τα πολλαπλάσια αριθμών. Ωστόσο δεν είναι σαφές αν αυτό γίνεται με τρόπο που αναδεικνύει την πολλαπλασιαστική σχέση (π.χ., με τα αριθμητικά και λεκτικά εργαλεία που προτείνονται στη θεματική ενότητα των κλασματικών), ή αυτό γίνεται μέσω της απαγγελίας της αριθμητικής ακολουθίας με βήμα >1. ή με επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (π.χ. 5+5+5).

Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις
Ο όρος «πολλαπλασιαστικές καταστάσεις» αναφέρεται ρητά στο περιεχόμενο της Α΄ και της Β΄ Δημοτικού. Ενώ γίνεται σαφές ότι θεωρείται σημαντικό τα παιδιά να εκτεθούν σε διαφόρων ειδών πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, δεν είναι ξεκάθαρο σε τι αναφέρεται ο όρος αυτός και σε ποιους μαθησιακούς στόχους αντιστοιχεί. Στην Α΄ Δημοτικού (αλλά όχι στη Β΄) αναφέρονται τα προβλήματα του τύπου «επαναλαμβανόμενη πράξη», «συμμεταβολή ποσοτήτων», «δημιουργία νέου μεγέθους» (σελ. 67). Γίνεται παραπομπή σε προτεινόμενες δραστηριότητες (ΑρΔ6, ΑρΔ8, σελ. 76), οι οποίες, όμως, δεν καλύπτουν τους τύπους αυτούς.

Ρητοί αριθμοί
Οι κλασματικοί αριθμοί εισάγονται ήδη από την Α΄ Δημοτικού, μέσω της πολλαπλασιαστικής σύγκρισης ποσοτήτων και ως μέρος του όλου, μέσω του ισομερισμού συνεχών, κυρίως, ποσοτήτων.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΠΕΠ ΣΕ ΑΛΛΕΣ ΘΕΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΟΤΗΤΕΣ
Όπως έχει ήδη αναφερθεί, μια ιδιαίτερα σημαντική για το ΠΕΠ θεματική ενότητα είναι οι μετρήσεις συνεχών μεγεθών. Στο ΑΠ (2011) αναφέρονται δύο τρόποι μέτρησης: Με επικαλύψεις (που παραπέμπει σε προσθετική δομή: Πόσες μονάδες είναι;) και με επανάληψη της μονάδας (που παραπέμπει σε πολλαπλασιαστική δομή: Πόσες φορές «χωράει» η μονάδα στην ποσότητα;). Ωστόσο, η μέτρηση με επανάληψη της μονάδας εμφανίζεται μόνο για το μήκος και τη χωρητικότητα στο Νηπιαγωγείο, μόνο για το μήκος στην Α΄ Δημοτικού και καθόλου στη Β΄ Δημοτικού. Μια πιο συστηματική και συνεπής αντιμετώπιση των μετρήσεων όλων των μεγεθών με επανάληψη της μονάδας ενδεχομένως θα αναδείκνυε τον πολλαπλασιαστικό χαρακτήρα της μέτρησης.

Η πολλαπλασιαστική σχέση της υπό μέτρηση ποσότητας με τη μονάδα --**Π**(οσότητα)=κ.**Μ**(ονάδα)--είναι η βάση της αντισταθμιστικής αρχής (Clements & Sarama, 2009): «Μεγαλύτερη» μονάδα, μικρότερο αριθμητικό αποτέλεσμα στη μέτρηση». Νύξεις για την αντισταθμιστική αρχή γίνονται στο ΑΠ (2011). Για παράδειγμα, στις επεξηγήσεις για το στόχο Ν΄: Μ3 προτείνεται να συζητηθεί από τα παιδιά το γεγονός ότι η μέτρηση του ίδιου μήκους με διαφορετικές μονάδες δίνει διαφορετικά αριθμητικά αποτελέσματα (ΑΠ, 2011, σελ 181-182). Ωστόσο, σε καμία τάξη δεν προτείνεται εμβάθυνση σε αυτή την αρχή. Κάτι τέτοιο θα ήταν, όμως θα ήταν απολύτως συμβατό με το στόχο της θεματικής ενότητας «Άλγεβρα» που αναφέρεται στη διερεύνηση σχέσεων μεταξύ συμμεταβαλόμενων μεγεθών (Ν: Α3, Α΄:Α6 και Β΄: Α6).

Επιπλέον, ένα σημείο που πρέπει να τονιστεί είναι η απουσία ποικιλίας προβλημάτων πολλαπλασιαστικής δομής στο πλαίσιο της μέτρησης. Πιο συγκεκριμένα, στις καταστάσεις μέτρησης που αναφέρονται ρητά στο ΑΠ(2011), ζητούμενο πάντα είναι το αποτέλεσμα της μέτρησης (Ν΄:Μ4, Μ9, Μ14, Α΄:Μ6, Μ13, Μ18, Β΄: Μ4, Μ10, Μ15).

Δηλαδή, με δεδομένο το μοντέλο της κατάστασης **Π=**κ.**Μ,** πάντα ζητείται το κ. Είναι όμως απολύτως εφικτό να κατασκευαστούν προβλήματα στα οποία το ζητούμενο να είναι το **Π** ή το **Μ**. Μια τέτοια προσέγγιση είναι συμβατή με την προσέγγιση παρόμοιων πολλαπλασιαστικών καταστάσεων στο πλαίσιο των διακριτών ποσοτήτων που υπάρχουν στο ΑΠ (2011).

Να σημειώσουμε, επίσης, ότι στο ΑΠ (2011) δεν εντοπίστηκε ρητή αναφορά σε καταστάσεις μέτρησης όπου δεν επαρκεί η ολόκληρη μονάδα Θα ήταν χρήσιμη μια τέτοια αναφορά και ενδεχομένως, προτάσεις για την έκφραση αποτελεσμάτων τέτοιων μετρήσεων (π.χ. «λίγο περισσότερο από 5 μονάδες», «5 μονάδες και μισή μονάδα»).

Όπως έχει αναφερθεί, στο ΠΕΠ εντάσσεται και η διαστατική ανάλυση που, στην πιο απλή της μορφή, είναι η οργάνωση και η δόμηση του 2-διάστατου χώρου (επίπεδο). Έτσι λοιπόν, η θεματική ενότητα «Χώρος και Γεωμετρία» απαιτεί το και συμβάλλει στο ΠΕΠ. Στο ΑΠ (2011), ήδη από το Νηπιαγωγείο, αναφέρεται η δόμηση του χώρου με χρήση υλικών όπως η σκακιέρα και το τετραγωνισμένο χαρτί (Ν: Γ3) και οι επικαλύψεις επίπεδων σχημάτων με άλλα σχήματα. Από την Α΄ Δημοτικού υπάρχουν αναφορές στη δόμηση επίπεδων χωρίων σε γραμμές και στήλες (ΜΔ3, σελ. 79), Άλλοι στόχοι και περιεχόμενο στη θεματική της Γεωμετρίας, που συνδέονται στενά με το ΠΕΠ είναι η ανάλυση/σύνθεση σχημάτων και η αξονική συμμετρία. Και τα δύο αυτά πεδία που εισάγονται ήδη από το Νηπιαγωγείο, δίνουν εργαλεία για τον ισομερισμό συνεχών ποσοτήτων και συνδέονται προφανώς με τη θεματική των κλασματικών αριθμών, που εισάγεται στην Α΄τάξη. Θα μπορούσαν, ενδεχομένως, να αξιοποιηθούν για καταστάσεις μοιρασιάς συνεχούς ποσότητας, ήδη από το Νηπιαγωγείο.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η εργασία αυτή αποτελεί μια πρώτη προσπάθεια κριτικής και συνδυαστικής εξέτασης ενός αναλυτικού προγράμματος ως προς τη πραγμάτευση ενός σύνθετου δικτύου μαθηματικών ιδεών και, συγκεκριμένα, του ΠΕΠ στο ΑΠ (2011).

Από την πρώτη καταγραφή του περιεχομένου και της διάρθρωσής του στο ΑΠ (2011) γίνεται εμφανής η προσπάθεια για μια συστηματική προσέγγιση διαφόρων πτυχών του ΠΕΠ, από νωρίς και με μια αναπτυξιακή προοπτική, λαμβάνοντας υπόψη την έρευνα στη μαθητική εκπαίδευση. Για παράδειγμα, οι ενέργειες που θεωρούνται θεμελιώδεις για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης (ισομερισμός, μέτρηση με διαφόρων ειδών μονάδες και επανάληψη μιας ποσότητας) εισάγονται ήδη από το Νηπιαγωγείο. Αξιοσημείωτο είναι επίσης ότι το ΑΠ (2011) αναφέρεται ρητά στη χρήση συμβολικών εργαλείων για την έκφραση πολλαπλασαστικών σχέσεων και δεν περιορίζεται στον υπολογισμό γινομένων και πηλίκων. Επιπλέον, οι πολλαπλασιαστικές αυτές σχέσεις αξιοποιούνται στη πραγμάτευση των κλασματικών αριθμών, ξεφεύγοντας από τη στενή θεώρηση του κλάσματος ως μέρος του όλου.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα στοιχεία του ΠΕΠ που αναφέρονται ρητά στο ΑΠ βρίσκονται όλα στη θεματική ενότητα Αριθμοί και Πράξεις. Ειδικότερα, ένα μεγάλο μέρος των σχετικών στόχων του ΑΠ (2011) εντάσσεται στη υποθεματική Φυσικοί Αριθμοί, στο πλαίσιο διακριτών ποσοτήτων. Αντίστοιχη, ρητή, πραγμάτευση στο πλαίσιο συνεχών ποσοτήτων γίνεται στην υποθεματική Κλασματικοί Αριθμοί, για την οποία προβλέπεται πολύ λιγότερος διδακτικός χρόνος. Η αξιοποίηση περιεχομένου που ήδη υπάρχει, όπως συζητήθηκε, σε άλλες θεματικές ενότητες του ΑΠ (Μετρήσεις, Χώρος και Γεωμετρία και Άλγεβρα), θα μπορούσε να αμβλύνει αυτή την ασυμμετρία. Αυτό, όμως, απαιτεί, κατά την άποψής μας, ρητές διασυνδέσεις μεταξύ των κατάλληλων περιοχών, σαφείς επεξηγήσεις και υποδειγματικές δραστηριότητες. Πράγματι, το γεγονός ότι υπάρχει περιεχόμενο πρόσφορο για την ανάπτυξη πολλαπλασιαστικής σκέψης δεν εξασφαλίζει την κατάλληλη αξιοποίησή του. Για παράδειγμα, η αναπαράσταση ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου (3x4) σε ένα τετραγωνισμένο περιβάλλον, δεν αρκεί για τη δόμηση του χωρίου σε στήλες και σε γραμμές, ούτε για τη θεώρηση του ορθογωνίου ως 3 στήλες των 4 μονάδων, ή 4 γραμμές των 3 μονάδων, ή 12 μονάδες.

Συνοψίζοντας τη συζήτηση που προηγήθηκε, ρητή και συστηματικά διατυπωμένη σύνδεση με το ΠΕΠ θα ήταν, θεωρούμε, χρήσιμη στην ανάδειξη α) του πολλαπλασιαστικού χαρακτήρα της μέτρησης (επανάληψη της μονάδας, «σπάσιμο» της μονάδας, αντισταθμιστική αρχή), β) του ρόλου των μονάδων διαφορετικού τύπου, και ιδιαίτερα της σύνθετης μονάδας στις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις, γ) του ρόλου των ενεργειών της ανάλυσης /σύνθεσης σχημάτων, καθώς και της αξονικής συμμετρίας στη Γεωμετρία ως εργαλείο για τον ισομερισμό στις συνεχείς ποσότητες και δ) της σημασίας της μελέτης, αλλά και της έκφρασης πολλαπλασιαστικών σχέσεων στο πλαίσιο των συμμεταβαλόμενων μεγεθών στην άλγεβρα.

Κλείνοντας, θα θέλαμε καταρχήν να αναγνωρίσουμε ότι αυτή η εργασία δεν αποτελεί παρά μια πρώτη προσπάθεια προσέγγισης του θέματος και δεν είναι σε καμία περίπτωση εξαντλητική. Ενδεχομένως, να πυροδοτήσει μια συζήτηση, από την οποία να προκύψουν θεωρητικά, αλλά και μεθοδολογικά εργαλεία ανάλυσης ενός αναλυτικού, ίσως και προτάσεις για τη βελτιστοποίηση της διάρθρωσης του παρόντος αναλυτικού ως προς το ΠΕΠ. Η προσπάθεια αυτή έχει σημασία, καθώς το ΠΕΠ είναι θεμελιώδες όχι μόνο για την ανάπτυξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης, αλλά και για μια ενιαία αντιμετώπιση των φυσικών και μη φυσικών αριθμών μέσω της εισαγωγή του αριθμού ως λόγου, όπως αναδεικνύεται στο αριθμητικό πρόγραμμα του V.V. Davydov (Cobb, Perlwitz, & Underwood, 1996).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Clements, D.H. (2007). Curriculum research: Towards a framework for "research-based curricula". *Journal for Research in Mathematics Education*, *38* (1), 35-70.

Confrey, J. (2008). Learning trajectories and rational number reasoning. Ανακτήθηκε από: www.human.cornell.edu/sites/default/files/HD/nsfalw/Confrey-NSF.pdf

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math:The learning trajectories approach*. New York, NY, USA: Routledge.

Cobb, P., Perlwitz, M., & Underwood, D. (1996). Constructivism and activity theory: a consideration of their similarities and differences as they relate to mathematics education. In H. Mansfield, N.A. Pateman, & N. Bednarz (Eds.), *Mathematics for tomorrow's young children* (pp. 10-58). Dodrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*, 3-17.

Hackenberg, A. (2010).Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition & Instruction 28*(4), 383–432.

Lamon, S. J. (2008). *Teaching fractions and ratios with understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. In S. Donovan & J. D. Bransford (Eds.), *How students learn: History, mathematics, and science in the classroom* (pp. 309-349).Washington, DC, USA: National Academy Press.

Sophian, C. (2004). A prospective developmental perspective on early mathematics instruction. In D. H. Clements & J. Sarama (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics* (pp. 253-266). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Vamvakoussi, X., Christou, K.P., & Vosniadou, S. (2018). Bridging psychological and educational research on rational number knowledge. *Journal of Numerical Cognition*, *4*(1), 84–106.

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M., & Verschaffel, L. (2009). Students' overuse of proportionality on missing-value problems: How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(2), 187-211.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (pp. 127–174). New York: Academic Press.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2011). *Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Επιστημονικό πεδίο: Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση*. Ανακτήθηκε από http://ebooks.edu.gr/info/newps