ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ ΚΑΙ ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ ΣΤΟ ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ

Πήττα Γεωργία, Βαμβακούση Ξένια

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

g.pitta@uoi.gr, xvamvak@uoi.gr

Παρουσιάζουμε μέρος μιας θεματικά εστιασμένης έρευνας σχεδιασμού με στόχο την υποστήριξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στην πρωτοσχολική ηλικία, εστιάζοντας σε μια δραστηριότητα στην οποία οι όροι για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια εισάγονται για να περιγράψουν την πολλαπλασιαστική σχέση των φυσικών αριθμών 1-10 με τη μονάδα, με τους αριθμούς να αναπαριστώνται ως συνεχείς ποσότητες. Παρουσιάζουμε το σκεπτικό και το σχεδιασμό της δραστηριότητας και ευρήματα από την πρώτη εφαρμογή της με παιδιά του νηπιαγωγείου που δείχνουν οφέλη τόσο για την εκμάθηση των όρων, όσο και τη νοηματοδότησή τους. Συζητάμε ενδεχόμενες αναθεωρήσεις στον επανασχεδιασμό με βάση τα ευρήματα.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Μέχρι και σχετικά πρόσφατα ήταν διαδεδομένη η πεποίθηση ότι η πολλαπλασιαστική/αναλογική σκέψη έπεται της προσθετικής, η οποία αποτελούσε και βάση για την οργάνωση των αναλυτικών προγραμμάτων (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018), με αποτέλεσμα τα παιδιά της πρωτοσχολικής ηλικίας να εκτίθενται σημαντικά λιγότερο, ή και καθόλου σε πολλαπλασιαστικές καταστάσεις. Ωστόσο, πολλά ερευνητικά δεδομένα δείχνουν ότι τα μικρά παιδιά μπορούν να αναγνωρίσουν αντιληπτικά πολλαπλασιαστικές/αναλογικές σχέσεις (McCrink & Spelke, 2016; Mix, Huttenlocher, & Levine, 2002) και να διαχειριστούν απλές πολλαπλασιαστικές καταστάσεις με διακριτές, αλλά και συνεχείς ποσότητες (Hunting & Davis, 1991). Επιπλέον, η πρώιμη πολλαπλασιαστική σκέψη φαίνεται να ενισχύεται με την έκθεση σε σχετικές άτυπες ή τυπικές εμπειρίες (Hunting & Davis, 1991; Van den Heuvel-Panhuizen & Elia, 2020).

Τα δεδομένα αυτά δεν έχουν αξιοποιηθεί πλήρως στην πρωτοσχολική εκπαίδευση, παρόλο που στόχοι σχετικοί με την πολλαπλασιαστική σκέψη εντάσσονται ρητά στα αναλυτικά προγράμματα. Για παράδειγμα, μια ανάλυση του ελληνικού προγράμματος για το Νηπιαγωγείο και τις δύο πρώτες τάξεις του Δημοτικού (Βαμβακούση & Καλδρυμίδου, 2018) έδειξε ότι οι στόχοι που αφορούν τις προσθετικές σχέσεις υπερτερούν αυτών που αφορούν τις πολλαπλασιαστικές, ως προς το πλήθος και τον προβλεπόμενο διδακτικό χρόνο. Επιπλέον, οι στόχοι που αφορούν πολλαπλασιαστικές καταστάσεις με διακριτές ποσότητες προηγούνται και υπερτερούν σε πλήθος, σε σχέση με αυτές με συνεχείς. Τέλος, τα γλωσσικά εργαλεία για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων είναι περιορισμένα.

Είναι γεγονός ότι τα παραπάνω προβλήματα, για συνεχείς ποσότητες, παρουσιάζουν διαδικαστικές προκλήσεις για τα παιδιά. Πράγματι, μόνο στις διακριτές ποσότητες είναι εφαρμόσιμες στρατηγικές ευπρόσιτες στα παιδιά, όπως η αντιστοιχία «ένα προς πολλά», «πολλά προς ένα» και η επαναλαμβανόμενη μοιρασιά «από ένα». Ωστόσο, φαίνεται ότι η κατανόηση για τις αρχές που διέπουν τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις αναπτύσσεται παράλληλα για τα δύο είδη ποσοτήτων (Kornillaki & Nunes, 2005). Πολλοί ερευνητές, για διαφορετικούς αλλά συμπληρωματικούς λόγους, υποστηρίζουν την ενιαία αντιμετώπιση των διακριτών και των συνεχών ποσοτήτων στην εκπαίδευση. Για παράδειγμα, ο Steffe (2013) υποστηρίζει ότι η ίδια νοητική ενέργεια, αυτή της μοναδοποίησης, με την έννοια της «κατάτμησης της αισθητηριακής εμπειρίας σε μονάδες» υπόκειται της (νοητικής) κατασκευής διακριτών και συνεχών ποσοτήτων. Η Sophian (2004) αναδεικνύει ως παρόμοιο το ρόλο της μονάδας στη μέτρηση και την καταμέτρηση. Οι Βαμβακούση και Καλδρυμίδου (2018) επισημαίνουν ότι οι μαθηματικές ενέργειες που απαιτούνται στην περίπτωση των παραπάνω προβλημάτων (επανάληψη μιας ποσότητας, μέτρηση με διαφορετικές μονάδες και ισομερισμός) είναι κοινές στα δύο είδη ποσοτήτων.

Από την άλλη μεριά, τα γλωσσικά εργαλεία είναι καθοριστικής σημασίας προκειμένου τα παιδιά να αναγνωρίσουν ίδιες σχέσεις σε διαφορετικά πλαίσια και να οργανώσουν τις άτυπες και τυπικές τους εμπειρίες με τις πολλαπλασιαστικές καταστάσεις (Hunting & Davis, 1991). Πράγματι, πρόσφατα ερευνητικά δεδομένα δείχνουν ότι παιδιά που διαθέτουν απλό λεξιλόγιο για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων (π.χ. «διπλάσιο») στην 1η τάξη, υπερτερούν σε ικανότητες πολλαπλασιαστικής και αναλογικής σκέψης στη 2η (Vanluydt, Supply, Verschaffel, & Van Dooren, 2021).

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε μέρος μιας εν εξελίξει *θεματικά εστιασμένης έρευνας σχεδιασμού* (Gravemeijer & Prediger, 2019) με στόχο την ανάπτυξη ενός προγράμματος δραστηριοτήτων για την υποστήριξη της πολλαπλασιαστικής σκέψης στην πρωτοσχολική εκπαίδευση. Αυτό το είδος έρευνας σχεδιασμού δίνει την δυνατότητα της επιλογής τόσο του τρόπου με τον οποίο θα διδαχθεί το υπό μελέτη αντικείμενο όσο και της δομής της διδασκαλίας η οποία δεν αφορά ένα γενικό εκπαιδευτικό ερώτημα αλλά τον αναστοχασμό ενός εμπειρικού/ πρακτικού? διδακτικού θέματος (Hußmann and Prediger 2016). Βασικοί άξονες του προγράμματος είναι α) η ενιαία και παράλληλη αντιμετώπιση διακριτών και συνεχών ποσοτήτων, β) η παροχή εμπειριών που σχετίζονται και με τις τρεις μαθηματικές ενέργειες που είναι θεμελιώδεις για τις πολλαπλασιαστικές έννοιες και διαδικασίες (ισομερισμός, επανάληψη μονάδας και μέτρηση με διαφορετικές μονάδες) και γ) η εισαγωγή όρων για πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια. Έχει προηγηθεί μια εφαρμογή του προγράμματος σε αρχική μορφή με παιδιά του νηπιαγωγείου (Pitta, Kaldrimidou, & Vamvakoussi, 2021) και το πρόγραμμα έχει επανασχεδιαστεί, με βάση τα ευρήματα. Εδώ εστιάζουμε σε μια νέα δραστηριότητα που σχεδιάστηκε ως εισαγωγική στη δεύτερη εκδοχή της ακολουθίας, στην οποία οι όροι για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια εισάγονται για να περιγράψουν την πολλαπλασιαστική σχέση των φυσικών αριθμών 1-10 με τη μονάδα (ν=νx1), με τους αριθμούς να αναπαριστώνται ως συνεχείς ποσότητες (μήκη). Ο σχεδιασμός της δραστηριότητας βασίζεται στην αξιοποίηση της εμπειρίας των παιδιών για την ακολουθία των φυσικών αριθμών ως απόλυτα και ως τακτικά αριθμητικά, τόσο σε αριθμητικό επίπεδο, όσο και σε φωνολογικό επίπεδο και η ανάδειξη της πολλαπλασιαστικής σχέσης των φυσικών με τη μονάδα μέσω της μέτρησης. Τοπική μας υπόθεση (για τη δραστηριότητα αυτή) είναι ότι οι κανονικότητες που διέπουν την αριθμητική ακολουθία, αλλά και την παραγωγή των λέξεων για τα πολλαπλάσια και τα υποπολλαπλάσια θα υποστηρίξει την εξαγωγή των όρων αυτών, ενώ η πολλαπλασιαστική σύγκριση μέσω μέτρησης θα τους νοηματοδοτήσει.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Σχεδιασμός της δραστηριότητας

Η δραστηριότητα είναι πλαισιωμένη σε ένα σενάριο με πρωταγωνιστές αθλητικές ομάδες φανταστικών πλασμάτων. Τα πλάσματα κατασκευάστηκαν ως ξύλινοι κύλινδροι, με ίδια διάμετρο βάσης και διαφορετικό ύψος. Με μονάδα μήκους (μ.μ.) ίση με 4 εκ. και 3 εκ. κατασκευάστηκαν 2 ομάδες των 10 πλασμάτων με ύψος 1μ.μ. – 10 μ.μ. «η ομάδα της Παμ» και «η ομάδα του Πομ», όπου «Παμ» και «Πομ» το όνομα των πλασμάτων με ύψος 1μ.μ.. Ως συμπληρωματικό υλικό κατασκευάστηκε ικανός αριθμός από μονάδες για κάθε περίπτωση (ξύλινοι κύλινδροι ύψους 4 εκ. και 3 εκ., αντίστοιχα), καθώς και «φανέλες» από χαρτόνι για τις παίκτριες.

Η δραστηριότητα εξελίσσεται ως εξής: Αρχικά δίνονται οι παίκτριες στα παιδιά για να τις παρατηρήσουν και γίνονται γενικές ερωτήσεις σχετικά με το ύψος τους. Οι παίκτριες αποσύρονται και παραμένει η παίκτρια που αντιστοιχεί στη μονάδα, που συστήνεται στα παιδιά ως «η αρχηγός της ομάδας» με το όνομα «Παμ». Τα παιδιά καλούνται να συμπληρώσουν τον κατάλληλο αριθμό στη φανέλα της, όπου αναγράφεται ήδη η συλλαβή «Παμ» (1 Παμ). Στη συνέχεια, καλούνται διαδοχικά οι επόμενες παίκτριες με χρήση των τακτικών αριθμητικών (η δεύτερη, η τρίτη, κ.λπ.) και τα ονόματά τους να προκύπτουν με διαδοχικές προσθήκες της συλλαβής «Παμ» (ΠαμΠαμ, ΠαμΠαμΠαμ, κ.λπ. – ηχητικό αναπτυσσόμενο μοτίβο). Τα παιδιά καλούν τις παίκτριες λέγοντας το όνομα της κάθε μιας και χτυπώντας παλαμάκια για κάθε συλλαβή. Από την τρίτη παίκτρια και μετά, ζητείται από τα παιδιά να προβλέψουν το όνομα της επόμενης.

Δεδομένου ότι με την αύξηση των συλλαβών γίνεται δυσχερής η εκφώνηση των ονομάτων, οι παίκτριες σειριακά, ξεκινώντας από τη δεύτερη, γνωρίζουν στα παιδιά το υποκοριστικό τους όνομα που προκύπτει από το κατάλληλο αριθμητικό πρόθεμα (δι-, τρι-,…) και την κατάληξη «Παμ» (π.χ. «Οι φίλες μου με φωνάζουν Τρι-Παμ»). Τα παιδιά καλούνται να συμπληρώσουν τον αριθμό της παίκτριας στη φανέλα της (3 Παμ), ως προοίμιο για τη συμβολική έκφραση ενός αποτελέσματος μέτρησης πολλαπλασιαστικά. Κάθε παίκτρια συγκρίνεται ως προς το ύψος με την Παμ, με ρητή ερώτηση (π.χ. «Τι σχέση έχει το ύψος της Τρι-παμ με το ύψος της Παμ;»). Εισάγεται η χρήση των μονάδων για τη σύγκριση των δύο υψών. Η σχέση περιγράφεται με εκφράσεις όπως «η Τρι-Παμ είναι ψηλή ίσαμε με 3 Παμ», για να ακολουθήσει η εισαγωγή του όρου για το αντίστοιχο πολλαπλάσιο (τριπλάσιο). Τέλος, οι δύο παίκτριες λεκτικοποιούν τη μεταξύ τους σχέση (π.χ. «είμαι το τριπλάσιό σου – είμαι το ένα σου τρίτο»). Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με παραλλαγές ως προς τι ζητείται από τα παιδιά. Αρχικά, δίνεται το όνομα για να προβλέψουν το υποκοριστικό και να φτιάξουν τη φανέλα της κάθε παίκτριας. Στην πορεία, δίνεται η παίκτρια και πρέπει να βρουν το όνομά της, το υποκοριστικό της και να φτιάξουν τη φανέλα της, ή η φανέλα και ζητούνται τα υπόλοιπα. Η πολλαπλασιαστική σύγκριση του ύψους κάθε παίκτριας με αυτό της Παμ και η έκφραση της σχέσης με όρους πολλαπλασίων και υποπολλαπλασίων είναι σταθερό ζητούμενο. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με την «ομάδα του Πομ» (ίδιες σχέσεις, διαφορετική μονάδα). Αυτή τη φορά, η τυχαία σειρά στην παρουσίαση των παικτών ξεκινά σχεδόν άμεσα.

Σημειώνουμε ότι η ταυτοποίηση της «παίκτριας», όταν αυτή παρουσιάζεται με τυχαία σειρά προϋποθέτει τη μέτρησή της με τη μονάδα, ενώ η αναζήτηση της παίκτριας όταν είναι γνωστό το «όνομά» της συνδέεται με την επανάληψη της μονάδας προκειμένου να κατασκευαστεί.

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες ήταν οκτώ παιδιά με μητρική γλώσσα τα ελληνικά, μέσης ηλικίας 5 ετών 9 μηνών (με εύρος 5 έτη 7 μήνες – 6 έτη 4 μήνες) νηπιακού τμήματος ιδιωτικού σχολείου των Ιωαννίνων. Τα πέντε ήταν κορίτσια (ψευδώνυμα: Γιάννα, Σωτηρία, Λόρα, Ελένη και Πένυ) και τα τρία ήταν αγόρια (ψευδώνυμα: Άρης, Κώστας και Νικήτας). Το μόνο κριτήριο για τη συμμετοχή των παιδιών του τμήματος ήταν η συγκατάθεση των γονέων τους. Τα παιδιά είχαν εξεταστεί ατομικά πριν την παρέμβαση για να διερευνηθεί η γνώση τους για όρους σχετικούς με τα πολλαπλάσια και τα πολλαπλάσια. Μόνο ο όρος «μισό» τους ήταν οικείος, ως λέξη (δε διέθεταν τρόπους να εξηγήσουν ή να δείξουν τι είναι το «μισό»).

Διαδικασία και έλεγχος διατήρησης

Ο αρχικός σχεδιασμός της έρευνας προέβλεπε την εφαρμογή ολόκληρης της ακολουθίας δραστηριοτήτων, κάτι που δεν κατέστη δυνατό εξαιτίας της πανδημίας. Δοκιμάστηκε μόνο η νέα εισαγωγική δραστηριότητα, όταν οι συνθήκες επέτρεψαν τη δια ζώσης διδασκαλία το Μάιο του 2021. Η εφαρμογή έγινε σε δύο ομάδες των τεσσάρων παιδιών, στο χώρο του σχολείου. Κάθε ομάδα συμμετείχε σε 4 συναντήσεις, διάρκειας περίπου 45΄ λεπτών η κάθε μία. Διεξήχθη έλεγχος διατήρησης ατομικά μετά την παύση για τη καλοκαιρινές διακοπές, περίπου 4 μήνες μετά την παρέμβαση.

Ο έλεγχος διατήρησης έγινε στο ίδιο πλαίσιο με αυτό της δραστηριότητας: Παρουσιάστηκε η «ομάδα της Παμ» και οι «φανέλες», χωρίς διάταξη. Η ερευνήτρια επέλεξε τρεις παίκτριες σε τυχαία σειρά. Τα παιδιά κλήθηκαν να α) αναγνωρίσουν την παίκτρια, αντιστοιχώντας το όνομά της και τη φανέλα της (Έργο Α), β) να ελέγξουν / εξηγήσουν την απάντησή τους (Έργο Β) και γ) να εκφράσουν τη σχέση μεταξύ της παίκτριας και της «αρχηγού» (Έργο Γ). Εξετάστηκαν οι σχέσεις 2:1, 3:1, 4:1 και οι αντίστροφές τους.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ανταπόκριση των παιδιών στην παρέμβαση

Τα παιδιά αξιοποίησαν την ακολουθία ως διαδοχή των αριθμολέξεων για να προβλέψουν το όνομα της «επόμενης παίκτριας», ενώ προέβλεψαν και την ύπαρξη «παικτριών» πέραν των 10 πρώτων. Για παράδειγμα:

Κώστας: Κυρία, εγώ ξέρω ποια είναι. (*Είναι*) η Τέσσερα-Παμ (…) Επειδή αυτές είναι το ένα-δύο-τρία [*δείχνει τις αντίστοιχες παίκτριες επάνω στο τραπέζι*] και αυτή θα είναι το τέσσερα. Μετά είναι το τέσσερα.

Πένυ: Να πάρουμε και μια πολύ μεγάλη, την Εικοσιτέσσερα-Παμ

Μετά την εύρεση των «συμπτυγμένων» ονομάτων και την εισαγωγή του όρου «διπλάσιο», τα παιδιά φάνηκε να προσαρμόζουν γρήγορα τα «ονόματα» σε όρους για τα πολλαπλάσια. Για παράδειγμα:

Ε: Για την Δι-Πάμ είπαμε πως είναι η διπλάσια της Παμ. Για την Τρι-Πάμ;

Πένυ - Κώστας: Τριπλάσια (μαζί).

Η κατασκευή των όρων δε στηριζόταν μόνο στην ηχητική ομοιότητα του ονόματος της παίκτριας με τον αντίστοιχο όρο. Για παράδειγμα, η Λόρα, έχοντας μπροστά της την Τετρα-Παμ δίπλα από τη στοίβα με τις τέσσερις μονάδες, ρωτήθηκε «τι σχέση έχει η Τετρα-Παμ με την Παμ» και απάντησε «η τεσσερα-πλάσια» γιατί χρειάστηκε «τέσσερις Παμ, Παμ-Παμ-Παμ-Παμ».

Όσον αφορά τα υποπολλαπλάσια, προέκυψε η εξής δυσκολία: Ο όρος «μισό» αρχικά είτε χρησιμοποιήθηκε για την έκφραση και των άλλων σχέσεων, είτε για την κατασκευή των άλλων όρων, όπως στο παρακάτω απόσπασμα όπου ζητείται η σχέση ανάμεσα στην Παμ και την Τρι-Πάμ:

Κώστας- Λόρα.: Ότι είναι το ένα της μισό (*μαζί)*

Ε: Το ένα της μισό; Μα χρειαστήκαμε 3 κουκλάκια για την Τρι-Πάμ.

Πένυ.: Το τρία σου μισό.

Η δυσκολία αυτή είναι απόρροια της έκφρασης της πρώτης σχέσης (1:2) ως «είμαι το ένα σου μισό», με το σκεπτικό ότι θα ήταν πιο οικεία στα παιδιά. Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, η ερευνήτρια προέβη σε διορθωτική κίνηση, αντικαθιστώντας τον όρο «μισό» με τον όρο «ένα δεύτερο» και συνδέοντας τους όρους με την ακολουθία των τακτικών αριθμητικών. Παρατηρήθηκε βελτίωση, αλλά η κατασκευή των όρων για τα πολλαπλάσια ήταν σταθερά πιο εύκολη για τα παιδιά, σε σχέση με το αντίστοιχο υποπολλαπλάσιο, όπως φαίνεται και στο επόμενο παράδειγμα:

Ε: Και τι σχέση έχει η Πεντα-πάμ, η μεγάλη, με την Παμ, την μικρή;

Άρης: Πενταπλάσια.

Ε: Μπορείτε να μου πείτε και για την Παμ; Τι σχέση έχει με την Πεντα-πάμ;

Άρης: Είναι το ένα τέταρτο.

Ε: Μα είναι πέντε τα κομμάτια της Πεντα-πάμ.

Σωτηρία: Το ένα πέμπτο.

Τα παιδιά αξιοποίησαν τον αναδρομικό κανόνα της αριθμητικής ακολουθίας για να προβλέψουν το ύψος της επόμενης παίκτριας, κάτι που εξελίχθηκε σε έκφραση των πολλαπλασίων με επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Παρακάτω, ο Άρης διατυπώνει τον κανόνα, εξηγώντας πώς επέλεξε την 5η παίκτρια:

Άρης: Επειδή μέτρησα ότι η προηγούμενη ήταν η τέταρτη άρα τώρα θα χρειαστώ αυτή και άλλο ένα. Για να φτάσω στο πέμπτο [Δείχνει παίρνοντας την Τετρα-Παμ και βάζοντας επάνω της μία μονάδα]

Ε: Για να πάμε από την Πεντα-Παμ στην Εξα-Πάμ πόσες Παμ θα βάλεις;

Άρης: Μία.(…) Κάθε φορά θα βάζουμε ένα τέτοιο. [Δείχνει τη μονάδα]

Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης τα παιδιά πραγματοποίησαν ή/και αναφέρθηκαν στις ενέργειες της μέτρησης και της επανάληψης μιας ποσότητας (μονάδα), είτε για να απαντήσουν, είτε για να αιτιολογήσουν. Στο πρώτο από τα παρακάτω αποσπάσματα ο Κώστας, έχοντας βρει το όνομα της παίκτριας από τη φανέλα της (Οχτα-πάμ) εξηγεί πώς θα την βρει και ποια σχέση έχει με την Παμ. Στο δεύτερο, ο Νικήτας εξηγεί και ονοματίζει τη σχέση της Παμ με την Τριπ-Παμ:

Κώστας: Θα την φτιάξω πρώτα. Δε ξέρω πόση θα είναι. Θέλω οκτώ τέτοια [*τη φτιάχνει*] (…) Είναι οχταπλάσια. Είναι οκτώ Παμ.

Νικήτας: Αφού τρία κομμάτια χρειαστήκαμε για να μετρήσουμε τη μεγάλη. (…) Αυτή [*δείχνει την Παμ*] είναι το ένα από τα τρία κομμάτια αυτηνής [*δείχνει την Τρι-Πάμ*]. Είναι το ένα της τρίτο.

Έλεγχος διατήρησης

Οι αποκρίσεις των παιδιών στο Έργο Α (Αναγνώριση) κωδικοποιήθηκαν ως 1 (Επιτυχής) και 0 (Μη Επιτυχής). Για το Έργο Β εξετάστηκε αν χρησιμοποίησαν μια έγκυρη διαδικασία για να ελέγξουν ή να εξηγήσουν πώς αναγνώρισαν την παίκτρια, είτε αυθόρμητα, είτε μετά από αίτημα (1: Ναι, 0: Όχι). Για το έργο Γ εξετάστηκε αν χρησιμοποίησαν τους όρους για τα πολλαπλάσια (Γ1) και τα υποπολλαπλάσια (Γ2) ή όχι (0: Όχι, 1: Ναι).

Τέλος, εξετάστηκε ο τρόπος με τον οποίο εξήγησαν τον όρο, ή περιέγραψαν τη σχέση (αν δεν χρησιμοποίησαν τον όρο). Όσον αφορά τα πολλαπλάσια εντοπίστηκαν 3 ειδών εξηγήσεις που κωδικοποιήθηκαν ως Π1: με επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (π.χ. «Η Τρι-Παμ είναι μία Παμ και άλλη μία και άλλη μία»), Π2: μέσω μέτρησης (π.χ. «Είναι η Δι-Παμ γιατί χωράει δύο Παμ») ή ως αποτέλεσμα μέτρησης (π.χ. «Είναι δύο Παμ») και Π3: μέσω πολλαπλασιασμού (π.χ. «Είναι τρεις φορές όσο η Παμ»). Όσον αφορά τα υποπολλαπλάσια, εντοπίστηκαν 3 ειδών εξηγήσεις που κωδικοποιήθηκαν ως Υ1: μέσω της σχέσης μέρους-όλου (π.χ. «Είναι το μισό γιατί είναι το ένα από τα δύο κομμάτια της Δι-Παμ»), Υ2: με αναφορά στη μέτρηση (π.χ. «Είναι το ένα τέταρτο επειδή η Παμ χωράει τέσσερις φορές στην Τετραπάμ») και Υ3: με συνδυασμό των Υ1 και Υ2 (π.χ. «Η Δι-πάμ χωράει δύο κομμάτια και το μισό είναι το ένα από αυτά τα δύο»). Στην Εικόνα 1 παρουσιάζονται οι απαντήσεις και εξηγήσεις του κάθε παιδιού, ανά έργο και ανά σχέση.

Παιδί	Σχέση 1:2/2:1						Σχέση 1:3/3:1						Σχέση 1:4/4:1					
	Α	Β	Γ				Α	Β	Γ				Α	Β	Γ			
			Γ1		Γ2				Γ1		Γ2				Γ1		Γ2	
Νικήτας	1	1	1	Π_1	1	-	1	1	1	Π_3	1	-	1	1	1	Π_3	1	-
Λόρα	1	1	1	Π_1	1	-	1	1	1	Π_3	1	$Υ_2$	1	1	1	Π_3	0	-
Κώστας	1	1	1	Π_1	1	$Υ_1$	1	1	1	Π_1	0	-	1	1	1	Π_1	0	-
Πένυ	1	1	1	Π_3	1	-	1	1	1	Π_3	1	$Υ_2$	1	1	1	Π_3	1	$Υ_2$
Άρης	1	1	1	Π_1	1	$Υ_3$	1	1	1	Π_3	1	$Υ_3$	1	1	1	Π_3	1	$Υ_3$
Σωτηρία	1	1	1	Π_1	1	-	1	1	1	Π_2	0	-	1	1	1	Π_2	0	-
Γιάννα	1	1	1	Π_2	1	$Υ_3$	1	1	1	Π_3	1	$Υ_3$	1	1	1	Π_3	1	$Υ_3$
Ελένη	0	0	0	-	0	-	0	0	0		0	-	0	0	0		0	-

Υπόμνημα: Π1: Με εναλαμβανόμενη πρόσθεση — Π2: Με μέτρηση — Π3: Με πολλαπλασιασμό — Υ1: Με τη σχέση μέρους-όλου — Υ2: Με αναφορά στη μέτρηση — Υ3: Με συνδυασμό των Υ1,Υ2

Εικόνα 1: Απαντήσεις και εξηγήσεις ανά παιδί, ανά έργο και ανά σχέση

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1, ένα παιδί (Ελένη) δεν ανταποκρίθηκε σε κανένα από τα έργα. Η Ελένη, ενώ ήταν πρόθυμη να συμμετάσχει, δεν έδειξε πρόθυμη να απαντήσει στις συγκεκριμένες ερωτήσεις που της τέθηκαν. Όλα τα υπόλοιπα παιδιά α) αναγνώρισαν και τις τρεις παίκτριες αντιστοιχώντας το όνομα και τη φανέλα τους (Έργο Α), β) χρησιμοποίησαν μια έγκυρη διαδικασία (μέτρηση) για να ελέγξουν ή καθώς εξηγούσαν την απάντησή τους (Έργο Β), γ) χρησιμοποίησαν τους όρους «διπλάσιο», «τριπλάσιο» και «τετραπλάσιο (Έργο Γ1) και δ) χρησιμοποίησαν όρο, συγκεκριμένα, τον όρο «μισό» για την έκφραση της σχέση 1:2 (Έργο Γ2).

Όλα τα παιδιά ήταν σε θέση να εξηγήσουν τι σημαίνουν οι όροι για τα πολλαπλάσια που χρησιμοποίησαν. Δύο παιδιά έδωσαν συστηματικά τον ίδιο τύπο εξήγησης (ο Κώστας την Π1 και η Πένυ την Π3). Τα υπόλοιπα παιδιά έδωσαν από δύο διαφορετικούς τύπους εξήγησης. Με εξαίρεση τη Σωτηρία, η οποία δεν έδωσε την Π3 για καμία από τις τρεις σχέσεις, τα υπόλοιπα παιδιά άλλαξαν από Π1 ή Π2 για το 2:1, σε Π3 για τα δύο μεγαλύτερα πολλαπλάσια.

Μόνο δύο παιδιά (Άρης, Γιάννα) χρησιμοποίησαν και τους τρεις όρους για τα υποπολλαπλάσια και, επιπλέον, εξήγησαν την απάντησή τους (συστηματικά με Υ3). Άλλα δύο παιδιά (Νικήτας, Πένυ) χρησιμοποίησαν και τους τρεις όρους, αλλά με περιορισμούς στις εξηγήσεις. Η Πένυ εξήγησε για τα 1:3 και 1:4, αλλά όχι για το 1:2, ενώ ο Νικήτας δεν εξήγησε σε καμία περίπτωση. Η Λόρα χρησιμοποίησε τον όρο «μισό» και «ένα τρίτο», εξηγώντας μόνο το τελευταίο. Για το 1:4, ανέφερε το «ένα μισό της τέσσερα», χωρίς εξήγηση. Τέλος, ο Κώστας και η Σωτηρία δε χρησιμοποίησαν άλλους όρους, εκτός από το «μισό», και μόνο ο Κώστας το εξήγησε. Για τους υπόλοιπους όρους κατασκεύασαν εκφράσεις πατώντας στο «μισό», ακριβώς όπως η Λόρα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Από την πρώτη εφαρμογή της δραστηριότητας φαίνεται ότι, όπως υποθέσαμε, τα παιδιά αξιοποίησαν την εμπειρία τους με την αριθμητική ακολουθία ως διαδοχή των αριθμολέξεων και ως αριθμητική πρόοδο, και την κανονικότητα στην παραγωγή των όρων για τα πολλαπλάσια. Η εισαγωγή των όρων για τα υποπολλαπλάσια συνάντησε εμπόδια, κυρίως λόγω της επιλογής να χρησιμοποιηθεί ο όρος «μισό», που παραβίασε την κανονικότητα στην παραγωγή των όρων με βάση τα τακτικά αριθμητικά, κάτι που θα αναθεωρηθεί στον επανασχεδιασμό. Τα παιδιά οικειοποιήθηκαν τις ενέργειες της μέτρησης και της επανάληψης μιας ποσότητας και τις αξιοποίησαν στις εξηγήσεις τους. Ο έλεγχος διατήρησης έδειξε ότι 4 περίπου μήνες μετά την παρέμβαση, η περιγραφή των σχέσεων ν:1 μέσω των πολλαπλασίων και η ικανότητα εξήγησης είχε διατηρηθεί, με διαφορές ως προς τον τύπο εξήγησης μεταξύ των παιδιών και την παρατήρηση ότι τα μεγαλύτερα πολλαπλάσια επέσυραν πιο επεξεργασμένες εξηγήσεις (μέσω πολλαπλασιασμού) που θα αξιοποιηθεί στον επανασχεδιασμό. Από την άλλη μεριά, στις σχέσεις 1:ν παρατηρήθηκαν διαφορές μεταξύ των παιδιών, τόσο ως προς τη χρήση των όρων, όσο και ως προς την εξήγηση. Σημειώνουμε ότι η χρήση των όρων για τα υποπολλαπλάσια δε συνοδεύτηκε απαραίτητα από εξήγηση, αλλά δεν υπήρξε περίπτωση που να δόθηκε εξήγηση (να περιγράφτηκε η σχέση) χωρίς τη χρήση του όρου. Αυτό είναι μια ένδειξη για την υποστηρικτική λειτουργία του λεξιλογίου για την πολλαπλασιαστική σκέψη (Vanluydt et al., 2021).

Είναι εύλογο ότι μια μεμονωμένη δραστηριότητα δεν είναι αρκετή για την εκμάθηση και νοηματοδότηση όρων για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων. Αυτή τη στιγμή υπάρχουν αρκετές ενδείξεις ότι η ένταξη της συγκεκριμένης δραστηριότητας στο συνολικό πρόγραμμα δραστηριοτήτων (Pitta et al., 2021) θα λειτουργήσει συμπληρωματικά στην υποστήριξη των παιδιών ώστε πραγματευτούν μια ποικιλία πολλαπλασιαστικών καταστάσεων, κάτι που θα διερευνηθεί σε επόμενες εφαρμογές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βαμβακούση, Ξ., & Καλδρυμίδου, Μ. (2018). Το αναλυτικό πρόγραμμα ως εκπαιδευτικό υλικό: το παράδειγμα του πολλαπλασιαστικού εννοιολογικού πεδίου. Στο Χ. Σκουμπουρδή & Μ. Σκουμιός (Επιμ.), *Πρακτικά 3ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή για το Εκπαιδευτικό Υλικό στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες* (σελ. 302-311). Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Gravemeijer, K., & Prediger, S. (2019). Topic-specific design research: An introduction. In G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compedium for early career researchers in mathematics education* (pp. 33-57). Cham: Switzerland: SpringerOpen.

Hunting, R. & Davis, G. (1991). *Early fraction learning*. New York: Springer-Verlag.

Kornilaki, K., & Nunes, T. (2005). Generalising principles in spite of procedural differences: Children's understanding of division. *Cognitive Development*, *20,* 388-406.

McCrink, K., & Spelke, E. S. (2016). Non-symbolic division in childhood. *Journal of Experimental Child Psychology*, *142*, 66-82.

Mix, K.S., Huttenlocher, J., & Levine, S. (2002). *Quantitative development in infancy and early childhood*. New York: Oxford University Press.

Pitta, G., Kaldrimidou, M., & Vamvakoussi, X. (2021). Enhancing the development of multiplicative reasoning in early childhood education: a case study. In M. Inprasitha, N. Changsri & N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 481-490). Khon Kaen,Thailand: PME.

Sophian, C. (2004). Mathematics for the future: Developing a Head Start curriculum to support mathematics learning. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*(1), 59-81.

Steffe, L. P. (2013). On children's construction of quantification. In R. L. Mayes & L.L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning in mathematics and science education: Papers from an International STEM Research Symposium* (pp. 13-41). Laramie, Wyoming: University of Wyoming.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Elia, I. (2020). Mapping kindergartners' quantitative competence. *ZDM Mathematics Education*, *52*, 805–819.

Vanluydt, E., Supply, A. S., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2021). The importance of specific mathematical language for early proportional reasoning. *Early Childhood Research Quarterly*, *55*(2), 193-200.