



ΕΝΕΔΙΜ 9



ΠΡΑΚΤΙΚΑ 9ου ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ ΕΝΩΣΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.)

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΠΡΟΣΤΑ ΣΕ ΝΕΕΣ ΚΑΙ ΠΑΛΙΕΣ ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

3-5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΕΝΕΔΙΜ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΑ
ΤΜΗΜΑΤΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

Β. ΧΡΥΣΙΚΟΥ
Χ. ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΥ
Τ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗΣ
Κ. ΧΑΤΖΗΚΥΡΙΑΚΟΥ
Α. ΧΡΟΝΑΚΗ
Κ. ΣΔΡΟΛΙΑΣ



ΕΝΕΔΙΜ, 2022

**Εν.Ε.Δι.Μ.
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΑ ΤΜΗΜΑΤΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

9ου Πανελλήνιου Συνεδρίου
της Ένωσης Ερευνητών
Διδακτικής των Μαθηματικών

**Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΠΡΟΣΤΑ
ΣΕ ΝΕΕΣ ΚΑΙ ΠΑΛΙΕΣ ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ**

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Β. ΧΡΥΣΙΚΟΥ, Χ. ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΥ, Τ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗΣ,
Κ. ΧΑΤΖΗΚΥΡΙΑΚΟΥ, Α. ΧΡΟΝΑΚΗ, Κ. ΣΔΡΟΛΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

3-5 Ιουνίου 2022

Αναφορά ως

Β. Χρυσικού, Χ. Σταθοπούλου, Τ. Τριανταφυλλίδης, Κ. Χατζηκυριάκου, Α. Χρονάκη, & Κ. Σδρόλιας (Επιμ.). *Πρακτικά του 9ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.: Η μαθηματική εκπαίδευση μπροστά σε νέες και παλιές προκλήσεις*. Βόλος: ΕΝΕΔΙΜ

ISBN: 978-618-82277-2-9

Copyright © 2022 ΕΝΕΔΙΜ & ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Οργάνωση Ύλης: Β. Χρυσικού

Γραφιστική Επιμέλεια: Β. Κατσιγιαννάκης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ: ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΕΝΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

Κατσομήτρος Σωτήριος, Τάτσης Κωνσταντίνος.....	249
Η ΓΝΩΣΗ ΚΑΙ Η ΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ	
Τερζάκη Ευαγγελία, Λεμονίδης Χαράλαμπος	258
ΜΑΘΗΤΕΣ 'ΕΠΑΝΕΦΕΥΡΟΥΝ' ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΑΝΟΙΚΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗΣ	
Κωνσταντίνου Γιάννης, Τριανταφύλλου Χρυσανγή	267
«ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΗΚΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΚΥΚΛΟΥΣ» - ΜΙΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΕ ΨΗΦΙΑΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ	
Μπαλωμένου Αθανασία	277
ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΜΙΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΤΙΚΗ ΠΡΟΟΠΤΙΚΗ	
Δάλλας Μάρκος	286
ΝΟΕΡΕΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΙΣ ΑΠΟ ΠΑΙΔΙΑ ΚΑΙ ΕΝΗΛΙΚΕΣ: ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ	
Δεσλή Δέσποινα.....	296
ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΙΣΧΥΣΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΓΝΩΣΗΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	
Βισσαρίου Αικατερίνη, Δεσλή Δέσποινα	306
ΠΡΟΤΑΣΗ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	
Βισσαρίου Αικατερίνη, Δεσλή Δέσποινα	316
ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ: ΜΙΑ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ	
Κόπτση Ιωάννα, Χρήστου Κωνσταντίνος, Βαμβακούση Ξένια	326
ΠΤΥΧΕΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ: ΜΙΑ ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ	
Αυγέρη Θεοδώρα, Βαμβακούση Ξένια	336
ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟΙ ΧΑΡΤΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΑΙΣΘΗΣΗΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ	
Γεωργιάδης Βασίλειος Χρήστος, Χρήστου Κωνσταντίνος	346
Η ΔΙΠΛΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΠΡΟΚΑΤΑΛΗΨΗΣ ΤΟΥ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ -Η ΑΚΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ	
Κύρβη Δέσποινα-Ιωάννα, Βαμβακούση Ξένια, Χρήστου Κωνσταντίνος	356

ΠΤΥΧΕΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ: ΜΙΑ ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

Αυγέρη Θεοδώρα, Βαμβακούση Ξένια

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

theoavg@hotmail.gr, xvamvak@uoi.gr

Παρουσιάζεται μια εμπειρική μελέτη με στόχο τη διερεύνηση πτυχών της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία. Δεκαπέντε εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να αξιολογήσουν απαντήσεις υποθετικών μαθητών σε ένα ερώτημα σχετικά με την πυκνή διάταξη των ρητών αριθμών, να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης τους και να δώσουν ανατροφοδότηση. Εξετάστηκαν η ορθότητα της αξιολόγησης, η ποιότητα της εξήγησης και οι τρόποι χρήσης αντιπαραδειγμάτων κατά την ανατροφοδότηση. Τα ευρήματα αναδεικνύουν δυσκολίες των εκπαιδευτικών σε συνιστώσες της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία, συγκεκριμένα την κοινή και την εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου, τη γνώση του περιεχομένου και των μαθητών και τη γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Το ερώτημα σχετικά με τη γνώση που είναι απαραίτητη για την διδασκαλία ενός αντικειμένου έχει απασχολήσει σημαντικά την εκπαιδευτική έρευνα. Οι Ball και συνεργάτες (Ball, Thames & Felps, 2008) σκιαγράφησαν ορισμένες συνιστώσες της *Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία* (ΜΓΔ) που έχουν αποτελέσει σημείο αναφοράς για τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης. Στην εργασία αυτή υιοθετήσαμε το θεωρητικό πλαίσιο των Ball και συνεργατών και μελετήσαμε πτυχές της ΜΓΔ εν ενεργεία καθηγητών των μαθηματικών.

Η πρώτη από τις συνιστώσες της ΜΓΔ που μας αφορούν είναι η *κοινή γνώση του περιεχομένου*, δηλαδή, η γνώση για το μαθηματικό περιεχόμενο που πρόκειται να διδαχθεί και είναι απαραίτητη για τη διδασκαλία του, αλλά όχι αποκλειστικά. Η δεύτερη συνιστώσα είναι η *γνώση του περιεχομένου και των μαθητών*. Η πτυχή που μας ενδιαφέρει εκφράζεται μέσω της ικανότητας εξήγησης του τρόπου σκέψης των μαθητών, ιδιαίτερα όταν δίνουν λανθασμένες απαντήσεις. Τέλος, εστιάζουμε στη χρήση αντιπαραδειγμάτων κατά την ανατροφοδότηση που αφορά τόσο την *εξειδικευμένη γνώση του περιεχομένου* (γνώσεις για το μαθηματικό περιεχόμενο που είναι χρήσιμες αποκλειστικά στο πλαίσιο της διδασκαλίας), όσο και τη *γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας*. Πράγματι, η κατάλληλη επιλογή ή/και διδακτική διαχείριση αντιπαραδειγμάτων είναι μια μη τετριμμένη διαδικασία που θεωρείται πολύ σημαντική για τη διδασκαλία. Απαιτείται κατάλληλη επιλογή ή/και

διδασκτική διαχείριση ενός αντιπαραδείγματος ώστε να γίνουν ορατοί στους μαθητές οι λόγοι για τους οποίους ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος και να δημιουργηθούν προϋποθέσεις γενίκευσης, κάτι που φαίνεται να είναι απαιτητικό για τους εκπαιδευτικούς (Peled & Zaslavsky, 1997; Zaslavsky, 2010).

Στην εργασία παρουσιάζουμε μέρος μιας έρευνας που διερεύνησε τις παραπάνω πτυχές της ΜΓΔ σχετικά με τους ρητούς και τους πραγματικούς αριθμούς με εν ενεργεία εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Το μαθηματικό περιεχόμενο στο οποίο επικεντρωνόμαστε είναι η πυκνή διάταξη των πραγματικών αριθμών και ειδικότερα, η απειρία των αριθμών σε ένα διάστημα με άκρα ρητούς αριθμούς. Υπάρχει πληθώρα ερευνητικών δεδομένων που δείχνουν ότι η ιδιότητα αυτή είναι δύσκολη για τους μαθητές όλων των βαθμίδων εκπαίδευσης, ακόμη και για φοιτητές μαθηματικών τμημάτων (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Οι μαθητές συχνά υποστηρίζουν ότι ανάμεσα σε δύο ρητούς υπάρχει πεπερασμένο, πιθανά και μηδενικό πλήθος αριθμών, όπως συμβαίνει στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Επιπλέον, ακόμη και μαθητές που χαρακτηρίζουν ως «άπειρο» το πλήθος των ενδιάμεσων αριθμών συχνά αναφέρονται σε ένα πολύ μεγάλο πλήθος (π.χ. «ένα δισεκατομμύριο», «όσο οι κόκκοι της άμμου στην έρημο») που, όμως, παραμένει πεπερασμένο.

Τα ερευνητικά μας ερωτήματα ήταν: α) Αξιολογούν οι εκπαιδευτικοί σωστά λανθασμένες απαντήσεις σχετικά με το πλήθος των αριθμών σε ένα διάστημα; (*κοινή γνώση περιεχομένου*), β) Είναι σε θέση να εξηγήσουν τον τρόπο σκέψης των μαθητών; (*γνώση του περιεχομένου και των μαθητών*) και γ) Τι χαρακτηριστικά έχει η ανατροφοδότηση που δίνουν στις λανθασμένες απαντήσεις; Ειδικότερα, για το (γ), εξετάστηκε η χορήγηση αντιπαραδειγμάτων κατά την ανατροφοδότηση (*εξειδικευμένη γνώση περιεχομένου, γνώση του περιεχομένου και της διδασκαλίας*).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Συμμετέχοντες

Στην έρευνα συμμετείχαν 15 εν ενεργεία καθηγητές μαθηματικών (10 γυναίκες, 5 άντρες), απασχολούμενοι στον ιδιωτικό τομέα, με εργασιακή εμπειρία από 1 έως 7 έτη, η πλειοψηφία των οποίων είτε ήταν στη διαδικασία απόκτησης, είτε είχε ήδη λάβει μεταπτυχιακό δίπλωμα σπουδών. Μια συμμετέχουσα είχε εξειδίκευση στη Διδασκτική των Μαθηματικών.

Ερευνητικό εργαλείο

Το ερευνητικό μας εργαλείο συμπεριλάμβανε 3 έργα σχετικά με την πυκνή διάταξη των ρητών αριθμών. Λόγω περιορισμών χώρου, σε αυτή

την εργασία θα εξετάσουμε αναλυτικά ένα από αυτά. Το συγκεκριμένο έργο είχε τη μορφή «σεναρίου τάξης», ένα μεθοδολογικό εργαλείο που ενδείκνυται για τη διερεύνηση της ΜΓΔ (Biza, Nardi & Zachariades, 2007).

Στην αρχή του σεναρίου παρουσιάστηκε το μαθηματικό ερώτημα που είχε τεθεί από έναν υποθετικό καθηγητή σε μια τάξη Γ' Γυμνασίου (*Πόσοι αριθμοί υπάρχουν μεταξύ του 1,1 και του 1,3;*). Ακολούθησαν οι απαντήσεις τριών υποθετικών μαθητών Α, Β, Γ. Συγκεκριμένα: Α) «Ένας, ο 1,2», Β) «19, οι 1,12, 1,13, 1,14, 1,15, 1,19, 1,20, 1,21, 1,29» και Γ) «Είναι άπειροι... πάρα πολλοί.... πάνω από ένα δισεκατομμύριο. Μόνο ένας υπολογιστής θα μπορούσε να τους βρει όλους».

Οι υποθετικές απαντήσεις Α, Β και Γ εκφράζουν διαφορετικά επίπεδα κατανόησης για το πλήθος των ενδιάμεσων αριθμών σε ένα διάστημα (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Οι τρεις αυτές απαντήσεις, συγκαταλέγονται στις γνωστές από τη βιβλιογραφία απαντήσεις. Στην Α, ο μαθητής αντιμετωπίζει άμεσα τους δεδομένους αριθμούς ως φυσικούς, αναφερόμενος σε ένα πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων αριθμών που συμβαδίζει με την ακολουθία των φυσικών αριθμών. Στη Β, ο υποθετικός μαθητής πραγματοποιεί το πρώτο βήμα μιας δυνητικά επαναλήψιμης διαδικασίας προσθέτοντας ένα δεκαδικό ψηφίο στους δεδομένους αριθμούς (1,10 και 1,30) και στη συνέχεια τους αντιμετωπίζει παρόμοια με τον υποθετικό μαθητή της Α. Τέλος, η απάντηση Γ αντιστοιχεί στην ερμηνεία της έκφρασης «άπειροι αριθμοί» ως «ένα πολύ μεγάλο, αλλά πεπερασμένο, πλήθος αριθμών».

Στους συμμετέχοντες τέθηκαν τα εξής ερωτήματα: α) Υπάρχει κάποια απάντηση που θεωρείται σωστή; Αν ναι, ποια; Αν όχι, ποια θα θεωρούσατε εσείς σωστή απάντηση; β) Πώς θεωρείτε ότι σκέφτηκε για να απαντήσει ο κάθε μαθητής; γ) Τι ανατροφοδότηση θα δίνατε εσείς στη θέση του καθηγητή;

Διαδικασία

Οι εκπαιδευτικοί συμμετείχαν ατομικά σε ημι-δομημένες συνεντεύξεις, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν εξ αποστάσεως μέσω της εφαρμογής Skype. Οι συνεντεύξεις καταγράφηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Αξιολογήσεις απαντήσεων – Εξήγηση τρόπου σκέψης μαθητών

Οι αξιολογήσεις των απαντήσεων Α, Β και Γ εξετάστηκαν, από τους εκπαιδευτικούς, ως προς την ορθότητα τους (Ορθή/Λανθασμένη). Από τους 15 εκπαιδευτικούς, οι εννιά αξιολόγησαν σωστά και τις τρεις απαντήσεις Α, Β, Γ. Συγκεκριμένα, ενώ όλοι αποφάνθηκαν ορθά ότι οι Α

και Β απαντήσεις ήταν λανθασμένες, έξι εκπαιδευτικοί (Σ2, Σ3, Σ6, Σ7, Σ11, Σ13) θεώρησαν σωστή την απάντηση Γ. Για παράδειγμα:

Σ7: Συμφωνώ στο ότι ένας υπολογιστής θα μπορούσε να τους βρει όλους. Ένας ο οποίος θα έχει προγραμματιστεί από κάποιον μαθηματικό τέλος πάντων, και θα τρέξει έναν αλγόριθμο π.χ. για να τους βρει όλους.

Οι εξηγήσεις του τρόπου σκέψης του μαθητή εξετάστηκαν στις περιπτώσεις που η αξιολόγησή τους ήταν ορθή και κατηγοριοποιήθηκαν αδρά σε 3 κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία («Καμία Εξήγηση/ Αδυναμία Εξήγησης») συμπεριελήφθησαν οι απαντήσεις στις οποίες οι συμμετέχοντες είτε εξέφρασαν αδυναμία να εξηγήσουν, είτε απέφυγαν να δώσουν εξήγηση.

Στη δεύτερη κατηγορία («Μη ουσιαστική εξήγηση») συμπεριελήφθησαν όλες οι απαντήσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί είτε επαναλάμβαναν την απάντηση του μαθητή, είτε απέδιδαν το λάθος σε γενικούς παράγοντες όπως το υπόβαθρο του μαθητή στα μαθηματικά («καλός»/ «κακός» μαθητής), ή στην επιπολαιότητα. Στα παρακάτω αποσπάσματα παρουσιάζονται παραδείγματα της πρώτης (Σ2) και της δεύτερης (Σ1) κατηγορίας εξηγήσεων:

Σ2: Τώρα εδώ πέρα χάθηκα. Τι θέλει να πει ο ποιητής; Πώς το σκέφτηκε... Δεν ξέρω πώς το σκέφτηκε;

Σ1: Είναι μία επιπόλαιη απάντηση που μπορεί να οφείλεται σε διάφορους παράγοντες. Ο ένας είναι το υπόβαθρο γενικώς, ο δεύτερος είναι η επιπολαιότητα.

Τέλος, στην κατηγορία «Ουσιαστική Εξήγηση», συμπεριελήφθησαν όλες οι απαντήσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί πρόβαλαν ένα ουσιαστικό σκεπτικό για τον τρόπο που σκέφτηκε ο μαθητής. Στις περιπτώσεις αυτές που αφορούσαν τις Α και Β, οι εκπαιδευτικοί φάνηκε ότι αναγνώρισαν ότι οι μαθητές συλλογίζονται με βάση τους φυσικούς αριθμούς (βλ. Σ15). Όσον αφορά το Γ, οι εκπαιδευτικοί που έδωσαν ουσιαστικές εξηγήσεις αναγνώρισαν ότι ο υποθετικός μαθητής, ενώ χρησιμοποιεί τον όρο «άπειροι», στην ουσία αναφέρεται σε ένα πολύ μεγάλο, αλλά πεπερασμένο πλήθος (βλ. Σ15 στο παρακάτω απόσπασμα).

Σ5: Ε, ο πρώτος, ρε παιδί μου, σκέφτηκε ότι μετά το 1,1, πώς να το πω, στο δεκαδικό μέρος, μετά το 1 υπάρχει το 2 και μετά το 3. Άρα ανάμεσα στο 1,1 και στο 1,3 υπάρχει το 1,2.

Σ15: Εεε.. ο τρίτος σκέφτηκε ότι υπάρχουν άπειροι, αλλά το γεγονός ότι λέει ότι είναι πάνω από ένα δισεκατομμύριο, βάζει κάποιο φράγμα, πάει να τους μετρήσει, δεν νομίζω ότι η έννοια του απείρου του είναι κατανοητή.

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται η συχνότητα κάθε κατηγορίας εξήγησης ανά υποθετική απάντηση. Λιγότερες από τις μισές εξηγήσεις βρέθηκαν

στην κατηγορία «Ουσιαστική Εξήγηση», με τις περισσότερες από αυτές να δίνονται στο Α. Σημειώνουμε ότι, σε ατομικό επίπεδο, μόνο τρεις από τους εκπαιδευτικούς έδωσαν ουσιαστική εξήγηση και για τις τρεις υποθετικές απαντήσεις (Σ4, Σ8, Σ15). Επιπλέον, 5 από τους συμμετέχοντες δεν εξήγησαν ουσιαστικά καμία από τις υποθετικές απαντήσεις που είχαν αξιολογήσει σωστά, με δύο από αυτούς να έχουν αξιολογήσει σωστά και τις τρεις απαντήσεις (Σ1, Σ14).

Κατηγορία εξήγησης	Απαντήσεις μαθητών			Σύνολο
	Α	Β	Γ	
Ουσιαστική Εξήγηση	9	4	5	18
Μη ουσιαστική εξήγηση	5	7	2	14
Καμία εξήγηση	1	4	2	7
Σύνολο	15	15	9	39

Πίνακας 1: Συχνότητα της κάθε κατηγορίας εξήγησης ανά υποθετική απάντηση.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης το γεγονός ότι 5 από τους εκπαιδευτικούς που έδωσαν ουσιαστική εξήγηση για το Α, δεν αναγνώρισαν ως παρόμοια την περίπτωση του Β (Πίνακας 1). Τέτοια περίπτωση ήταν ο Σ10:

Σ10: Η δεύτερη απάντηση είναι λίγο περίεργη. Ο Β, είναι περίεργη φουλ η απάντησή του. Εεε.. (μικρή παύση). Ο Β πραγματικά δεν ξέρω, δεν ξέρω πώς προέκυψε η απάντησή του, δε μπορώ να φανταστώ.

Ανατροφοδότηση

Για την ανάλυση της ανατροφοδότησης, ελήφθησαν υπόψη όλες οι ανατροφοδοτήσεις των εκπαιδευτικών στις υποθετικές απαντήσεις που είχαν αξιολογήσει ως λανθασμένες. Σε πολλές περιπτώσεις, δόθηκε μία κοινή ανατροφοδότηση για περισσότερες από μία υποθετικές απαντήσεις. Στα κείμενα ανατροφοδότησης αναζητήθηκαν από τους συγγραφείς, αρχικά ξεχωριστά, αναφορές σε αντιπαραδείγματα. Διαπιστώθηκε ότι υπήρχαν άμεσες και έμμεσες τέτοιες αναφορές, οπότε τα κείμενα επανεξετάστηκαν, συγκρίθηκαν τα ευρήματα και λύθηκαν οι (ελάχιστες) διαφορές με συζήτηση. Συνολικά, εντοπίστηκαν 14 αναφορές σε αντιπαραδείγματα από αντίστοιχο αριθμό συμμετεχόντων. Τα αντιπαραδείγματα είτε αναφέρθηκαν ρητά (ως συγκεκριμένοι αριθμοί) ή περιγραφικά (π.χ. «δεκαδικοί με πολλά δεκαδικά ψηφία»), είτε υπονοήθηκαν με αναφορά στις απαντήσεις άλλων υποθετικών μαθητών ή με αναφορά σε μια τροποποιημένη μορφή του προβλήματος, στην οποία περισσότεροι ενδιάμεσοι αριθμοί θεωρήθηκαν ορατοί στο μαθητή (π.χ., μετά την προσθήκη του μηδενός ως δεκαδικό ψηφίο στους δεδομένους

αριθμούς). Τα κείμενα που περιείχαν αναφορές σε αντιπαραδείγματα εξετάστηκαν αρχικά ως προς το αν τα αντιπαραδείγματα χρησιμοποιούνται για να διαψεύσουν ένα συγκεκριμένο ισχυρισμό ή αν η πλαισίωσή του αναδεικνύει δυνατότητες για γενίκευση. Δημιουργήθηκαν έτσι δύο αρχικές κατηγορίες.

Στην πρώτη κατηγορία («Διάψευση Ισχυρισμού», N=4) εντάχθηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες ο εκπαιδευτικός αναφέρθηκε σε έναν ή περισσότερους ενδιάμεσους αριθμούς, με την πρόθεση να διαψεύσει το συγκεκριμένο ισχυρισμό ότι «δεν υπάρχουν άλλοι ενδιάμεσοι» αριθμοί». Για παράδειγμα:

Σ15: Θα τους ρωτούσα, ας πούμε, το 1,135 είναι ανάμεσα; Εκεί πιστεύω ότι όλοι οι μαθητές θα κοντοστέκονταν και θα έλεγαν α ναι, είναι ανάμεσα. Και θα έλεγα το 1,1355, ας πούμε, είναι ανάμεσα; Είναι ανάμεσα. Να καταλάβουν έτσι ότι είναι λάθος το σκεπτικό τους.

Στη δεύτερη κατηγορία («Δυνατότητες Γενίκευσης», N=7) εντάχθηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες διαφαίνεται μια μέθοδος παραγωγής αντιπαραδειγμάτων που δυνητικά οδηγεί στο συμπέρασμα της απειρίας των ενδιάμεσων αριθμών. Διαπιστώθηκαν, ωστόσο, διαφορές ως προς την επάρκεια περιγραφής της μεθόδου, οπότε και διαμορφώθηκαν δύο υποκατηγορίες. Σε όλες τις περιπτώσεις της πρώτης («Δυνατότητες Γενίκευσης – Ανεπαρκής περιγραφή, N=4), οι εκπαιδευτικοί περιορίστηκαν στο να αναφέρουν τη δυνατότητα περισσότερων/άπειρων δεκαδικών ψηφίων σε έναν αριθμό, παρόμοια με τον Σ3 στο παρακάτω απόσπασμα:

Σ3: Προφανώς θα τους εξηγούσα ότι μετά την υποδιαστολή μπορούμε να βάλουμε άπειρα ψηφία, οπότε και αυτός είναι ένας αριθμός. Ο 1,113758239 είναι μικρότερος από το 1,2.

Στη δεύτερη υποκατηγορία («Δυνατότητες Γενίκευση-Επαρκής Περιγραφή», N=3), εντάχθηκαν οι περιπτώσεις στις οποίες οι εκπαιδευτικοί περιέγραψαν επαρκώς μια γενικεύσιμη, επαναλήψιμη διαδικασία παραγωγής ενδιάμεσων αριθμών, είτε σε καθαρά αριθμητικό πλαίσιο (Σ1, Σ10), είτε στο πλαίσιο της ευθείας των πραγματικών αριθμών (Σ12). Για παράδειγμα:

Σ10: Θα έμενα λίγο παραπάνω στις δύο πρώτες απαντήσεις αρχικά που λέει 1,2 και 1,12. Θα τους έλεγα: Το πρώτο στάδιο είναι να πούμε απλά το 1,2. Αλλά μετά, όπως είπε και ο άλλος μαθητής, μπορούμε να πάρουμε και τη δεύτερη περίπτωση, να έχουμε 2 δεκαδικά ψηφία, 1,12 1,13 1,29. Θα τους έλεγα με την ίδια λογική, εφόσον την πρώτη φορά πήραμε ένα δεκαδικό και τη δεύτερη δύο δεκαδικά, γιατί να μη συνεχίσω να παίρνω τρία δεκαδικά; Και θα συνέχιζα ότι αυτό που σας λέω τώρα, από 3 δεκαδικά μπορεί να πάει 4 δεκαδικά. Οπότε γενικά

είναι μια διαδικασία που μπορούμε να τη συνεχίζουμε συνεχώς. Αφού αυτό μπορούμε να το κάνουμε για οποιονδήποτε αριθμό δεκαδικών, αρχίζουμε να καταλαβαίνουμε ότι είναι άπειροι αριθμοί.

Σ12: Θα τους έλεγα να διαλέξουν δύο οποιοσδήποτε αριθμούς θέλουν (πάνω στην ευθεία). Θα πάρω τη μέση αυτού του ευθυγράμμου τμήματος. Άρα υπάρχει ένας σίγουρα. Μετά στη μέση θα διαλέξω το ένα από τα δύο και θα το πήγαινα έτσι. Μπορούμε να κάνουμε άπειρη μεγέθυνση και να βρίσκουμε άπειρους αριθμούς.

Σημειώνουμε ότι ο Σ1 και ο Σ12 εξέφρασαν επίσης σαφή πρόθεση να πραγματευθούν την απειρία των ενδιάμεσων αριθμών όχι μόνο για το συγκεκριμένο, αλλά για οποιοδήποτε διάστημα.

Τέλος, στην κατηγορία «Άλλο» ($N=3$), εντάχθηκαν τρεις περιπτώσεις ανατροφοδότησης με χρήση αντιπαραδείγματος, οι οποίες κρίθηκαν, για διαφορετικό λόγο η κάθε μία, ως ακατάλληλες (βλ. παρακάτω αποσπάσματα). Συγκεκριμένα, ο εκπαιδευτικός Σ13 βασίστηκε σε ένα μη έγκυρο συλλογισμό ισχυριζόμενος ότι από το γεγονός ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί είναι άπειροι, προκύπτει ότι στα διαστήματα μεταξύ δύο αριθμών βρίσκονται άπειροι αριθμοί. Ο εκπαιδευτικός (Σ7) αναφέρθηκε αόριστα στους ενδιάμεσους αριθμούς ως «αριθμούς με πάρα-πάρα πολλά δεκαδικά ψηφία» και πραγματοποίησε ένα «άλμα γενίκευσης» στο συμπέρασμα της απειρίας των αριθμών στο δεδομένο διάστημα. Τέλος, ο Σ14 στήριξε τα αντιπαραδείγματα, αλλά και τη μέθοδο παραγωγής τους στην ακολουθία των φυσικών αριθμών, αναφερόμενος στους 4 πρώτους όρους μιας αντίστοιχης ακολουθίας δεκαδικών αριθμών με ένα δεκαδικό ψηφίο. Δεν είναι σαφές ποιος αριθμός θεωρεί ότι ακολουθεί το «0 κόμμα 9». Αν υποθεθεί ότι πρόκειται για το 1, τότε οι «επόμενοι» αριθμοί δεν είναι ανάμεσα στο 0 και το 1. Αν υποθεθεί ότι πρόκειται για το «0 κόμμα 10», τότε παρουσιάζεται μια ακολουθία ενδιάμεσων αριθμών με την παραπλανητική διάταξη των φυσικών, συμβατή με τη γνωστή παρανόηση των μαθητών ότι «οι δεκαδικοί αριθμοί με περισσότερα δεκαδικά ψηφία είναι μεγαλύτεροι», την οποία θεωρήσαμε μη ενδεδειγμένη.

Σ13: Επειδή είναι πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών κι επειδή είναι άπειροι όλοι αυτοί οι αριθμοί, προφανώς ανάμεσα σε δύο αριθμούς δεν υπάρχει μόνο ένας δύο κ.λπ., υπάρχουν πάρα πολλοί, τους οποίους δεν είναι εύκολο να βρούμε. Συνήθως στην καθημερινότητα και στα μαθήματα χρησιμοποιούμε τους πιο εύκολους δηλαδή το 1,13 το 1,14 κτλ.

Σ7: Θα τους έλεγα ότι είναι άπειροι οι αριθμοί ανάμεσα στο 1,1 και στο 1,3 ε και δεν μπορούμε να το προσδιορίσουμε πόσο είναι αυτό, ότι δεν

σταματάει κάπου το άπειρο τέλος πάντων, ότι θα είναι αριθμοί με πάρα πάρα πολλά δεκαδικά ψηφία που προσεγγίζουν το 1,3.

Σ14: Κοίτα επειδή η απάντηση είναι ίδια και στους 3, θα τους μάξευα και θα τους έλεγα, ότι γενικά οι αριθμοί όπως ξέρουμε είναι άπειροι. Αυτό δεν σημαίνει ότι αρχίζω και μετράω 0,1,2,3,4 και δεν σταματάω ποτέ γιατί είναι άπειροι. Ακόμη και οι αριθμοί που μεσολαβούν για να πάμε από το 1 στο 2 είναι άπειροι, γιατί όπως καταλαβαίνουμε ότι όταν μετράω 0,1,2,3,4,5 συνεχίζω στο άπειρο, από το 0 να πάω στο 1 υπάρχει μετά ο αριθμός 0,1 0,2 0,3, οπότε με την ίδια λογική στη πρώτη φορά φτάνω στο άπειρο, έτσι και στο 0 κόμμα 1, κόμμα 2, κόμμα 3 κόμμα 4, πάντα είναι άπειροι οι αριθμοί για να φτάσω, να προχωρήσω στο 1.

Τέλος, αξίζει να επισημανθεί ένα ακόμα χαρακτηριστικό των ανατροφοδοτήσεων που δόθηκαν από τους συμμετέχοντες. Όπως ίσως έχει ήδη διαφανεί από τα αποσπάσματα που παρατέθηκαν, η συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία της ανατροφοδότησης δεν αναφέρεται καθόλου, ή αναφέρεται υποτυπωδώς, κυρίως μέσω προσχηματικών ερωτήσεων (π.χ. «Θα τους ρωτούσα, ας πούμε, το 1,135 είναι ανάμεσα;»). Εξετάζοντας διεξοδικά τα κείμενα των ανατροφοδοτήσεων, εντοπίστηκαν μόνο δύο εκπαιδευτικοί (Σ1, Σ6) που προέβλεψαν μια πιο ουσιαστική συμμετοχή των μαθητών (π.χ., ζητώντας εξήγηση της απάντησης, ή αναθέτοντας στους μαθητές να συγκρίνουν τις απαντήσεις τους). Για παράδειγμα:

Σ1: Θα ξεκινούσα από τον Β με τη συλλογιστική του Γ για να μπορέσουμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι σε όποιο διάστημα και αν πάρουμε τελικά, θα βρίσκουμε πάντα αριθμό ανάμεσα (...). Γενικά προτιμώ σε τέτοιες περιπτώσεις να ζητάω από τα παιδιά να εξηγήσουν, ποιο είναι το λάθος του άλλου. Ωστε να μπορέσουμε να φτάσουμε διαδοχικά στο ποιο είναι το σωστό.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην εργασία αυτή εξετάσαμε πτυχές της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία (Ball et al., 2008) εν ενεργεία εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Εστιάσαμε στις αποκρίσεις των συμμετεχόντων στις απαντήσεις υποθετικών μαθητών σε ένα ερώτημα σχετικά με το πλήθος των ενδιάμεσων αριθμών σε ένα δεδομένο διάστημα.

Το πρώτο εύρημα, που αφορά την κοινή γνώση περιεχομένου (Ball et al., 2008), ήταν ότι μόνο 9 από τους 15 εκπαιδευτικούς αξιολόγησαν σωστά και τις τρεις υποθετικές απαντήσεις, κάτι που είναι αξιοσημείωτο δεδομένου του μαθηματικού υποβάθρου των συμμετεχόντων. Οι υπόλοιποι 6 εκπαιδευτικοί συμφώνησαν με τον ισχυρισμό ότι «ένας υπολογιστής μπορεί να βρει όλους τους ενδιάμεσους αριθμούς» σε ένα

δεδομένο διάστημα, αποκαλύπτοντας μια αντίληψη του απείρου ως «ένα πολύ μεγάλο, αλλά πεπερασμένο πλήθος», παρόμοια με μαθητές της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Vamvakoussi & Vosniadou, 2012). Σημειώνουμε ότι δυσκολίες όσον αφορά την *κοινή γνώση περιεχομένου* αναδύθηκαν και κατά την ανατροφοδότηση. Ένα παράδειγμα που παρουσιάστηκε σε αυτή την εργασία ήταν η περίπτωση του μη έγκυρου συλλογισμού κατά την ανατροφοδότηση.

Η εξήγηση του τρόπου σκέψης των υποθετικών μαθητών (*γνώση του περιεχομένου και του μαθητή*, Ball et al., 2008) αποδείχθηκε επίσης απαιτητική. Οι περιπτώσεις στις οποίες δε δόθηκε εξήγηση, ή το λάθος αποδόθηκε σε γενικές παραμέτρους υπερέβαιναν τις περιπτώσεις στις οποίες δόθηκε ουσιαστική εξήγηση, με βάση ένα συγκεκριμένο σκεπτικό (π.χ. «σκέφτονται με βάση τους φυσικούς»). Η απόδοση του λάθους σε παράγοντες όπως η επιπολαιότητα, ή η γενική μαθηματική ικανότητα δεν είναι ευνοϊκή για την ουσιαστική διδακτική υποστήριξή των μαθητών.

Τέλος, όσον αφορά την ανατροφοδότηση, εστίασαμε στη χρήση αντιπαραδειγμάτων, που άπτεται τόσο της *εξειδικευμένης γνώσης του περιεχομένου*, όσο και της *γνώσης του περιεχομένου και της διδασκαλίας* (Ball et al., 2008). Το συγκεκριμένο σενάριο προσφερόταν για τη χρήση αντιπαραδειγμάτων και, πράγματι, οι εκπαιδευτικοί τα χρησιμοποίησαν, ενώ φάνηκε ότι είχαν στη διάθεσή τους και μεθόδους παραγωγής των αντιπαραδειγμάτων. Μόνο τρεις εκπαιδευτικοί, ωστόσο, τοποθέτησαν τα αντιπαραδείγματα σε ένα πλαίσιο που θα μπορούσε να λειτουργήσει επεξηγηματικά για τους μαθητές και να οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί σε ένα διάστημα. Το εύρημα αυτό συνηγορεί στη διαπίστωση ότι η κατάλληλη χρήση αντιπαραδειγμάτων είναι απαιτητική για τους εκπαιδευτικούς (Zaslavsky, 2010). Επιπλέον, με δύο μόνο εξαιρέσεις, στις περιγραφές των εκπαιδευτικών σκιαγραφήθηκε μηδαμινή ή υποτυπώδης πρόβλεψη συμμετοχής των μαθητών στη διαδικασία της ανατροφοδότησης. Τα ευρήματα σχετικά με την ανατροφοδότηση, παρόλο που δίνουν κάποιες ενδείξεις για την πρόθεση διαχείρισης παρόμοιων συμβάντων στην τάξη, θα πρέπει να αντιμετωπιστούν με επιφύλαξη, καθώς δεν αποκλείεται σε πραγματικές συνθήκες οι εκπαιδευτικοί να επεδίωκαν μια πιο ουσιαστική αλληλεπίδραση με τους μαθητές ή να ανέπτυσαν πιο πολύ τις εξηγήσεις τους.

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα της έρευνας αναδεικνύουν αδυναμίες σε διάφορες πτυχές των συνιστωσών της Μαθηματικής Γνώσης για τη Διδασκαλία που διερευνήθηκαν. Τα συμπεράσματα δεν μπορούν να γενικευθούν, δεδομένου του μικρού δείγματος, αλλά μπορούν να αξιοποιηθούν ως σημείο αφετηρίας για τη βαθύτερη διερεύνηση των ζητημάτων αυτών σε μελλοντική μελέτη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4), 301-309.
- Peled, I., & Zaslavsky, O. (1997). Counter-examples that (only) prove and counterexamples that (also) explain. *FOCUS on Learning Problems in Mathematics*, 19(3), 49- 61.
- Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2012). Bridging the gap between the dense and the discrete: The number line and the “rubber line” bridging analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, 14(4), 265-284.
- Zaslavsky, O. (2010). The explanatory power of examples in mathematics: Challenges for teaching. In M.K. Stein, L. Kucan (Eds.), *Instructional explanations in the disciplines* (pp. 107-128). Springer, Boston, MA.