2022 ΕΝΕΔΙΜ 9

ΠΡΑΚΤΙΚΑ
9ου ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ ΕΝΩΣΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.)

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΠΡΟΣΤΑ ΣΕ ΝΕΕΣ ΚΑΙ ΠΑΛΙΕΣ ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

3-5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΕΝΕΔΙΜ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΑ
ΤΜΗΜΑΤΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

Β. ΧΡΥΣΙΚΟΥ
Χ. ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΥ
Τ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗΣ
Κ. ΧΑΤΖΗΚΥΡΙΑΚΟΥ
Α. ΧΡΟΝΑΚΗ
Κ. ΣΔΡΟΛΙΑΣ

ΕΝΕΔΙΜ, 2022

Εν.Ε.Δι.Μ.

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

9ου Πανελλήνιου Συνεδρίου
της Ένωσης Ερευνητών
Διδακτικής των Μαθηματικών

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΠΡΟΣΤΑ ΣΕ ΝΕΕΣ ΚΑΙ ΠΑΛΙΕΣ ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Β. ΧΡΥΣΙΚΟΥ, Χ. ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΥ, Τ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗΣ,
Κ. ΧΑΤΖΗΚΥΡΙΑΚΟΥ, Α. ΧΡΟΝΑΚΗ, Κ. ΣΔΡΟΛΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

3-5 Ιουνίου 2022

Αναφορά ως

Β. Χρυσικού, Χ. Σταθοπούλου, Τ. Τριανταφυλλίδης, Κ. Χατζηκυριάκου, Α. Χρονάκη, & Κ. Σδρόλιας (Επιμ.). *Πρακτικά του 9ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.: Η μαθηματική εκπαίδευση μπροστά σε νέες και παλιές προκλήσεις.* Βόλος: ΕΝΕΔΙΜ

ISBN: 978-618-82277-2-9

Οργάνωση Ύλης: Β. Χρυσικού

Γραφιστική Επιμέλεια: Β. Κατσιγιαννάκης

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ: ΜΙΑ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Κόπτση Ιωάννα[1], Χρήστου Κωνσταντίνος[2], Βαμβακούση Ξένια[1]

[1]Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, [2]Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

joanna_kop09@yahoo.gr, kchristou@uowm.gr, xvamvak@uoi.gr

Παρουσιάζουμε μέρος μιας θεματικά εστιασμένης έρευνας σχεδιασμού, στην οποία αναπτύξαμε μια ακολουθία δραστηριοτήτων με στόχο τη σύνδεση της διαίρεσης με τη μέτρηση ποσοτήτων και την αξιοποίησή της σε μια εναλλακτική προσέγγιση του αλγόριθμου «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω». Η ακολουθία δοκιμάστηκε σε 4 παιδιά της Στ΄ Δημοτικού, με οφέλη στην ερμηνεία της διαίρεσης κλασμάτων και τον υπολογισμό πηλίκων. Παρουσιάζονται ευρήματα πριν, κατά τη διάρκεια και μετά την εφαρμογή, τα οποία θα αξιοποιηθούν στον επανασχεδιασμό της ακολουθίας.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η διαίρεση κλασμάτων είναι ένα από τα πιο απαιτητικά αντικείμενα στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Copur-Gencturk, 2021; Ma, 1999; Tirosh, 2000). Εκπαιδευτικοί και μαθητές, στην περίπτωση κλασματικού διαιρέτη, συγχέουν τη διαίρεση με τον πολλαπλασιασμό με το ίδιο κλάσμα ή με τη διαίρεση με τον παρονομαστή του κλάσματος, εκτιμούν λανθασμένα το πηλίκο, δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν ή να κατασκευάσουν σχετικά προβλήματα, δεν μπορούν να εξηγήσουν τους αλγόριθμους, και τους εφαρμόζουν λανθασμένα, ιδιαίτερα αυτόν που είναι γνωστός και ως «αντιστρέφω και πολλαπλασιάζω» (στο εξής, Α&Π). Δύο βασικοί παράγοντες δυσκολίας για τη διαίρεση κλασμάτων είναι, αφενός, το γεγονός ότι προαπαιτεί κατανόηση ενός σύνθετου πλέγματος εννοιών και διαδικασιών, όπως η έννοια των αντίστροφων αριθμών και ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων (Ma, 1999). Αφετέρου, η ερμηνεία της δυσχεραίνεται από το διαισθητικό μοντέλο της διαίρεσης ως «δίκαιη μοιρασιά» που απαιτεί ο διαιρέτης να είναι ακέραιος και μικρότερος από τον διαιρετέο και το πηλίκο μικρότερο από τον διαιρετέο. Το διαισθητικό αυτό μοντέλο παραμένει η κυρίαρχη πηγή νοήματος για τη διαίρεση ακόμα και σε ενήλικες, δημιουργώντας δυσκολίες στις περιπτώσεις που παραβιάζονται οι άδηλες παραδοχές που το διέπουν (Tirosh, 2000).

Κεντρικό ζήτημα για τη διαίρεση κλασμάτων και τις διαδικασίες της είναι το νόημα που της δίνεται είτε σε καθαρά αριθμητικό πλαίσιο, ως πράξη μεταξύ αριθμών, είτε ως μοντέλο καταστάσεων με αναφορά σε ποσότητες και σχέσεις ποσοτήτων (Greer, 1992). Από την πρώτη οπτική, η διαίρεση νοηματοδοτείται, κατά κύριο λόγο, ως αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού (αxβ:β=α, για β≠0). Από τη σκοπιά των ανώτερων μαθηματικών, η διαίρεση δεν είναι απαραίτητη ως αυτόνομη πράξη στους μη μηδενικούς ρητούς αριθμούς, καθώς αναπληρώνεται από την αντίστροφη πράξη, αλλά με τον αντίστροφο αριθμό. Από αυτή τη «διπλή αντιστροφή» (Li, 2008), προκύπτει άμεσα ο Α&Π. Αυτή η εξήγηση για τον Α&Π δεν είναι άμεσα προσβάσιμη σε παιδιά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Το ίδιο ισχύει και για τους «αλγεβρικούς» τρόπους προσέγγισης του Α&Π που βασίζονται σε μετασχηματισμούς της αρχικής παράστασης μέχρι να φτάσει στην επιθυμητή μορφή (Fredua-Kwarteng & Ahia, 2006), που απαιτούν κατανόηση συμβολικών παραστάσεων και ευχέρεια στον χειρισμό τους.

Από τη δεύτερη οπτική, μια κεντρική διάκριση είναι αυτή ανάμεσα στη «διαίρεση μερισμού» και τη «διαίρεση μέτρησης». Η διάκριση αυτή ανακύπτει σε καταστάσεις του τύπου των «ισοπληθών ομάδων» (π.χ. *Η δασκάλα είχε 20 μαρκαδόρους και έδωσε 4 στο καθένα από τα 5 παιδιά μιας ομάδας*) που είναι ασύμμετρες (Greer, 1992), με την έννοια ότι στη σχέση που διέπει αυτή την κατάσταση (5 παιδιά x 4 μαρκαδόροι/ανά παιδί = 20 μαρκαδόροι) ο πολλαπλασιαστής και ο πολλαπλασιαστέος έχουν διακριτούς ρόλους. Τα προβλήματα διαίρεσης που προκύπτουν από την κατάσταση αυτή αντιστοιχούν σε διαφορετικό νόημα για τη διαίρεση, στη «διαίρεση μερισμού» (*Πόσους μαρκαδόρους πήρε κάθε παιδί*; - ο διαιρετέος ισομερίζεται από τον αρχικό πολλαπλασιαστή) και στη «διαίρεση μέτρησης» (*Πόσα ήταν τα παιδιά της ομάδας;* - ο διαιρετέος μετράται από τον αρχικό πολλαπλασιαστέο). Το νόημα της μέτρησης διατηρείται όταν ο διαιρέτης είναι κλασματικός, αντίθετα με αυτό του μερισμού, που πρέπει να προσαρμοστεί ως «διαίρεση με τον πολλαπλασιαστή» (Greer, 1992). Από διδακτική άποψη, τυπικά στη βιβλιογραφία ο Α&Π συνδέεται με το (τροποποιημένο) νόημα της διαίρεσης μερισμού (Gregg & Gregg, 2007) σε καταστάσεις που δίνεται μια πληροφορία για το «μέρος» και ζητείται η αντίστοιχη πληροφορία για το «όλο» (π.χ. *Αν τα 3/4 του κέικ γεμίζουν τα 2/3 ενός δοχείου, πόσο κέικ γεμίζει όλο το δοχείο;*). Ο σχετικός τύπος μπορεί να προκύψει σε δύο βήματα, αρχικά με αναγωγή στην κλασματική μονάδα για το δοχείο (*το 1/3 του δοχείου γεμίζει με 3/4x1/2 του κέικ, άρα το 1 δοχείο γεμίζει με 3/4x1/2x3*). Η προσέγγιση αυτή είναι πολύ στενά συνδεδεμένη με το συγκεκριμένο τύπο προβλήματος και η γενίκευσή της είναι δυσχερής για τις μικρότερες ηλικίες.

Μια εξαίρεση στη σύνδεση του Α&Π με τη διαίρεση μερισμού είναι η προσέγγιση των Cavey και Kinzel (2014), που νοηματοδοτούν τον αντίστροφο ενός αριθμού ν ως τον αριθμό που εκφράζει πόσες φορές «χωράει» ο ν στη μονάδα. Με αυτή την ερμηνεία, η διαίρεση α/β:γ/δ προσεγγίζεται με αναγωγή στη μονάδα: Για τον υπολογισμό α/β:γ/δ (μέτρηση του α/β με το γ/δ), υπολογίζεται αρχικά πόσες φορές χωράει το γ/δ στη μονάδα που έχει ως αποτέλεσμα το δ/γ. Κατόπιν, το πηλίκο πολλαπλασιάζεται με το α/β, προκειμένου να βρεθεί το αρχικό ζητούμενο πηλίκο, καταλήγοντας στον τύπο του Α&Π. Η προσέγγιση αυτή μπορεί να αξιοποιηθεί μόνο μετά την εισαγωγή των κλασμάτων και των αντίστροφων αριθμών.

Στην εργασία παρουσιάζουμε μέρος μιας εν εξελίξει *θεματικά εστιασμένης έρευνας σχεδιασμού* (Gravemeijer & Prediger, 2019) με κεντρική προβληματική τη διδακτική προσέγγιση της διαίρεσης, κατά τρόπο ώστε να αναδεικνύεται το νόημα της διαίρεσης μέτρησης, να είναι δυνατή η επέκτασή της στη διαίρεση κλασμάτων, να καταλήγει εύλογα στον Α&Π και να είναι εφαρμόσιμη στις δύο τελευταίες τάξεις του Δημοτικού. Η προσέγγισή μας–που, όσο μπορούμε να γνωρίζουμε, δεν αναφέρεται στη βιβλιογραφία–βασίζεται στην άμεση σύνδεση της αριθμητικής πράξης της διαίρεσης με τη μέτρηση μεγεθών, συγκεκριμένα του μήκους, και αξιοποιεί την αρχή της «αντιστάθμισης» στη μέτρηση: Όταν κανείς μετρά ένα μέγεθος Μ με μια μονάδα μ, τότε Μ = α x μ, όπου α είναι το αριθμητικό αποτέλεσμα της μέτρησης. Αν το Μ είναι σταθερό και η μονάδα μεταβάλλεται, τότε το α είναι αντιστρόφως ανάλογο του μ. Επομένως, αν το μ πολλαπλασιαστεί με το λ ($\neq 0$), τότε το α πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφό του. Η αριθμητική πράξη της διαίρεσης είναι μια ανάλογη κατάσταση της μέτρησης μεγεθών, από την οποία αντλεί και το νόημά της ως «διαίρεση μέτρησης», με τις αντιστοιχίες Δ≡Μ, δ≡μ και π≡α, όπου Δ: ο διαιρετέος, δ: ο διαιρέτης και π:το πηλίκο (Δ/δ). Έτσι, η διαίρεση κλασμάτων (ή και γενικότερα) μπορεί να εξεταστεί υπό το πρίσμα μιας αλλαγής μονάδας (διαιρέτη), από μια αρχική μέτρηση (Δ, δ1, π1) σε μια δεύτερη μέτρηση (Δ, δ2, π2). Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κάνουμε τη διαίρεση 2/3: 5/6. Αν δ1=1, τότε π1=2/3. Ο συντελεστής μεταβολής του δ1 είναι το 5/6. Με βάση την αρχή της αντιστάθμισης, το π2 προκύπτει αν το π1 (2/3) πολλαπλασιαστεί με τον αντίστροφο του 5/6, δηλαδή το 6/5.

Σχεδιάσαμε μια ακολουθία δραστηριοτήτων βασισμένη σε αυτό το σκεπτικό, την οποία εφαρμόσαμε δοκιμαστικά σε παιδιά που είχαν ήδη εκτεθεί σε διδασκαλία για τη διαίρεση κλασμάτων, αλλά όχι για τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, με κεντρικό στόχο την άντληση πληροφοριών χρήσιμων για τον επανασχεδιασμό της (Gravemeijer & Prediger, 2019). Διερευνήσαμε α) την προϋπάρχουσα γνώση των παιδιών για τη διαίρεση κλασμάτων β) τη μεταβολή των γνώσεων αυτών μετά τη συμμετοχή τους στο πρόγραμμα των δραστηριοτήτων αυτών, γ) τις δυνατότητες και τους περιορισμούς της ακολουθίας.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Οι συμμετέχοντες στη δοκιμαστική παρέμβαση ήταν 4 παιδιά της Στ΄ Δημοτικού που είχαν διδαχθεί τη διαίρεση κλασμάτων στην Ε΄τάξη, ενώ δύο την είχαν επαναλάβει και στην Στ΄ τάξη. Κανένα δεν είχε διδαχθεί ακόμα τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Τα παιδιά συμμετείχαν ατομικά σε δύο συνεδρίες (περίπου 1,5 ώρας η κάθε μία).

Η έρευνα διαρθρώθηκε σε 3 φάσεις (Ι, ΙΙ, ΙΙΙ). Στη Φάση Ι διερευνήθηκε η τρέχουσα κατανόησή τους για τη διαίρεση γενικά και τη διαίρεση κλασμάτων, ειδικότερα. Τους ζητήθηκε: α) να εξηγήσουν με λόγια ή/και κατασκευάζοντας ένα πρόβλημα τι σημαίνουν δεδομένες πράξεις διαίρεσης, με τον τύπο των δεδομένων αριθμών να μεταβάλλεται (π.χ. ακέραιος διαιρετέος με ακέραιο και κλασματικό διαιρέτη), β) να υπολογίσουν πηλίκα με κλασματικό διαιρέτη και να εξηγήσουν πώς τα υπολογίζουν, γ) να επιλέξουν από ένα σύνολο έξι προβλημάτων αυτά που λύνονται με μια συγκεκριμένη διαίρεση (5:1/2) και γ) να υπολογίσουν ένα πολλαπλάσιο και ένα υπο-πολλαπλάσιο ενός αριθμού (το πενταπλάσιο και το 1/5 του 30, αντίστοιχα). Στη Φάση ΙΙΙ, τα παιδιά κλήθηκαν να επανεξετάσουν τα έργα των α και β, για κλασματικούς διαιρέτες.

Στη Φάση ΙΙ υλοποιήθηκε η ακολουθία δραστηριοτήτων, με 4 μέρη (Α, Β, Γ, Δ). Το κεντρικό πρόβλημα σε όλα τα μέρη αφορούσε μια σειρά αλλαγών του αριθμητικού αποτελέσματος μιας μέτρησης, μετά από μια σειρά αλλαγών της αρχικής μονάδας μέτρησης (αύξηση/μείωση με ακέραιο/μοναδιαίο κλασματικό συντελεστή, αντίστοιχα). Τα παιδιά κλήθηκαν α) να προβλέψουν την κατεύθυνση των αλλαγών του αποτελέσματος (αύξηση, μείωση), β) να υπολογίσουν τα νέα αποτελέσματα και να τα καταγράψουν σε πίνακες και γ) να διατυπώσουν συμπεράσματα. Υπήρχαν παραλλαγές όσον αφορά τους εμπλεκόμενους αριθμούς, το είδος των αναπαραστάσεων, αλλά και τον τρόπο παρουσίασης των αλλαγών της μονάδας (ως ακολουθία διαδοχικών αλλαγών ίδιας κατεύθυνσης ή σε τυχαία σειρά), σύμφωνα με το σκεπτικό της προσέγγισης των «προβλημάτων με παραλλαγές» που θεωρείται πρόσφορη και στη διαίρεση κλασμάτων (Gregg & Gregg, 2007; Sun, 2011).

Πιο συγκεκριμένα, στο μέρος Α το πρόβλημα τέθηκε σε ρεαλιστικό πλαίσιο, με φυσικά αντικείμενα ως εμπράγματες αναπαραστάσεις («πόσοι *τέτοιοι* φιόγκοι μπορούν να γίνουν από *αυτή* την κορδέλα;»), με στόχο να διερευνηθεί και να εκφραστεί η αρχή της αντιστροφής στο πλαίσιο της μέτρησης. Το μέρος Β αποτελείτο από 3 υπομέρη (Β1, Β2, Β3) με στόχο να εδραιωθεί η σύνδεση μεταξύ της διαίρεσης ως αριθμητική πράξη και της μέτρησης ποσοτήτων. Στο Β1 διατηρήθηκε το πλαίσιο του Α, αλλά με χάρτινες λωρίδες ως αναπαράσταση, στις οποίες αναγραφόταν το μήκος των κορδελών. Επιπλέον του έργου «αλλαγής μονάδας», ζητήθηκε η πράξη με την οποία θα μπορούσε να υπολογιστεί το αποτέλεσμα. Το Β2 αφορούσε την αριθμητική πράξη της διαίρεσης, με τους αριθμούς να αναπαριστώνται ξανά με χάρτινες λωρίδες. Τέλος στο Β3, με παρόμοιο υλικό ζητήθηκε η ερμηνεία της διαίρεσης με διαιρέτη μεγαλύτερο του διαιρετέου ως μέτρηση και ο υπολογισμός του πηλίκου (4:7).

Στο μέρος Γ, οι χάρτινες λωρίδες αναπαρέστησαν γενικευμένους αριθμούς (Δ: διαιρετέος, δ: διαιρέτης, π: πηλίκο), με στόχο τη γενίκευση της αρχής της αντιστροφής στο πλαίσιο της διαίρεσης. Τέλος, στο μέρος Δ, με τις λωρίδες να αναπαριστούν αριθμούς, οι μαθητές κλήθηκαν να ερμηνεύσουν διαιρέσεις με κλασματικό διαιρέτη (μοναδιαίο και μη) και να υπολογίσουν το πηλίκο.

Κεντρικός ρόλος της ερευνήτριας (πρώτη συγγραφέας) ήταν να προτρέπει τα παιδιά να εκφράσουν τις μεταβολές μέσω συντελεστών, τόσο προφορικά, όσο και καταγράφοντας τα αποτελέσματα σε ειδικά σχεδιασμένους πίνακες.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο τμήμα αυτό θα περιγράψουμε τα κύρια γενικά ευρήματα συνολικά για τα 4 παιδιά, αλλά θα δώσουμε σχετικά παραδείγματα εστιάζοντας σε ένα από αυτά, στο οποίο θα αναφερόμαστε με το ψευδώνυμο «Κοσμάς», που ήταν το παιδί με την πιο φτωχή αρχική κατανόηση για τη διαίρεση κλασμάτων.

Φάση Ι

Όλα τα παιδιά ήταν σε θέση να διατυπώσουν προβλήματα διαίρεσης, όταν οι δεδομένοι αριθμοί επέτρεπαν την ερμηνεία της διαίρεσης μερισμού, με αναφορά στη «δίκαιη μοιρασιά». Κανένα παιδί, όμως, δεν ήταν σε θέση να διατυπώσει πρόβλημα, ή να εξηγήσει με λόγια τι σημαίνει μια διαίρεση με κλασματικό διαιρέτη, ακόμα και στην πιο απλή περίπτωση (δ=1/2).

Ο Κοσμάς προσπάθησε να προσαρμόσει το αρχικό του πρόβλημα (*6 καραμέλες μοιράζονται σε 2* παιδιά) για δ=1/2, καταλήγοντας σε αδιέξοδο:

> Έξι δια 1/2 είναι 3… Έξι είναι οι καραμέλες, όπως πριν, οπότε… Δε γίνεται να έχεις μισό παιδί! Δεν μπορώ να φτιάξω πρόβλημα, αλλά ξέρω ότι έξι δια ένα δεύτερο είναι το μισό, δηλαδή τρία.

Όπως είναι προφανές, ο Κοσμάς ερμήνευσε το 6:1/2 ως «το μισό του έξι», συγχέοντας τη διαίρεση με τον πολλαπλασιασμό. Την ίδια δυσκολία εκδήλωσαν όλα τα παιδιά στο έργο αναγνώρισης προβλημάτων που λύνονται με δεδομένη πράξη (5:1/2). Για παράδειγμα, όλα τα παιδιά επέλεξαν ως κατάλληλο το πρόβλημα «Ο φούρναρης είχε 5κ. αλεύρι και έβαλε το μισό σε ένα κουβά. Πόσο αλεύρι έβαλε στον κουβά;». Ο Κοσμάς δεν έκανε ούτε μία σωστή επιλογή στα 6 προβλήματα και αντιμετώπισε όλους τους υπολογισμούς πηλίκων που του ζητήθηκαν με τον ίδιο τρόπο. Από τα άλλα παιδιά, μόνο ένα υπολόγισε σωστά τα πηλίκα για όλους τους κλασματικούς διαιρέτες, με τον Α&Π, εφαρμόζοντάς τον μηχανικά (κατά δήλωσή του).

Μόνο ένα παιδί εξέφρασε το 1/5 του 30 με πολλαπλασιασμό. Ο Κοσμάς πρότεινε αρχικά τη διαίρεση (30:5). Όταν του ζητήθηκε να εκφράσει το ίδιο πράγμα με πολλαπλασιασμό, ανταποκρίθηκε με το γινόμενο 5x6=30. Τέλος, κανένα παιδί δε θυμόταν τι είναι οι αντίστροφοι αριθμοί, οπότε η ερευνήτρια υπενθύμισε τον ορισμό του διδακτικού τους εγχειριδίου.

Φάση ΙΙ

Όσον αφορά την κατάσταση μεταβολής της μονάδας (στο εξής, μ) και του αποτελέσματος της μέτρησης (στο εξής, α), αρχικά τα παιδιά παρουσίασαν διαφορές ως προς α) το είδος της μεταβολής που παρατήρησαν (προσθετική /πολλαπλασιαστική), β) τον τρόπο που περιέγραψαν τις μεταβολές (με/χωρίς χρήση συντελεστή), γ) τους τρόπους με τους οποίους υπολόγισαν τα νέα αποτελέσματα (π.χ. άμεσα, με μέτρηση) και δ) την ετοιμότητα με την οποία άρχισαν να λαμβάνουν υπόψη και τις δύο μεταβολές ταυτόχρονα. Ανεξάρτητα από τις διαφορές, κοινά στοιχεία της πορείας των παιδιών στη διάρκεια της Φάση Β ήταν ότι όλα τα παιδιά: α) προέβλεπαν σωστά την κατεύθυνση της μεταβολής του α (αύξηση/μείωση), β) ήταν σε θέση να εκφράσουν την αύξηση μέσω συντελεστή και το έκαναν συστηματικά και αυθόρμητα, γ) δεν εξέφρασαν τη μείωση με κλασματικό συντελεστή αυθόρμητα και δ) δυσκολεύτηκαν να αναγνωρίσουν ως αντίστροφους αριθμούς τον τελεστή μεταβολής της μονάδας (στο εξής, Σμ) και τον τελεστή μεταβολής του αποτελέσματος (στο εξής, Σα), κάτι που επίσης προκάλεσε πολλές παρεμβάσεις, σταθεροποιήθηκε στην πιο απλή περίπτωση (ν, 1/ν), αλλά όχι στη γενική.

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζονται οι διαδοχικές απόπειρες του Κοσμά στο μέρος Α να περιγράψει τη σχετική κατάσταση και να διατυπώσει συμπέρασμα. Οι απόπειρες ακολουθούν τα αιτήματα της ερευνήτριας για έκφραση των μεταβολών χρησιμοποιώντας συντελεστές, είτε προφορικά, είτε γραπτά (με γκρι σκίαση στον Πίνακα 1). Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1, στην περίπτωση της μείωσης του μ ο Κοσμάς συνέδεσε άμεσα τις μεταβολές των μ, α και εξέφρασε την πρώτη μεταβολή του α πολλαπλασιαστικά (Κ1), αλλά τις επόμενες μεταβολές προσθετικά (Κ2). Στη συνέχεια παρατήρησε τη σχέση της κατεύθυνσης της μεταβολής του παρονομαστή του συντελεστή αλλαγής της μονάδας, αρχικά με το μέγεθος και το πλήθος των μονάδων (Κ3) και κατόπιν με τη μεταβολή του α, την οποία περιγράφει ως προσθετική (Κ4).

Μέρος Α, μείωση της μονάδας μέτρησης (Σμ=1/2, 1/3, 1/4)	
Κ1	Το αρχικό *(α)* είναι 12. Επειδή *(το μ)* είναι το μισό, πιο μικρό, πολλαπλασίασα *(το α)* με το 2 και βγήκε 24
Κ2	Μετά επειδή *(το μ)*είναι ακόμα πιο μικρό, πολλαπλασίασα *(το α)* με το... όχι… έβαλα συν 12…36 και στο 48 το ίδιο, στο 36 έβαλα συν 12.
Κ3	Όσο πιο μεγάλος ο παρονομαστής *(του Σμ)*, τόσο μικρότερα…τόσο πιο πολλά τα κομμάτια.
Κ4	Κάθε φορά που ο παρονομαστής *(του Σμ)* μεγαλώνει, αυτό *(α)* γίνεται συν δώδεκα
Κ5	Όταν έχουμε ένα κομμάτι *(μ)* και το κάνουμε κλάσμα, μισό, πολλαπλασιάζουμε το 12 *(α)* με το 2. Όταν έχουμε ένα τρίτο, θα πολλαπλασιάσουμε *(το α)* με το 3.
Κ6	Δηλαδή, όσο πάει και μεγαλώνει ο παρονομαστής *(του Σμ)* τόσο μεγαλώνει και το πόσες φορές χρειάζεται η κορδέλα.
Μέρος Α, αύξηση της μονάδας μέτρησης (Σμ = 2, 3, 4)	
Κ7	Όταν μεγαλώνει το κομμάτι *(μ)*, το νούμερο *(α)* μικραίνει.
Κ8.α	Όταν διπλασιάζεται το ένα *(μ)*, το άλλο *(μ)* διαιρείται με…τι; Με το 2. Όταν τριπλασιάζεται, είναι 12 δια 3. Και όταν τετραπλασιάζεται, είναι 12 δια 4.
Κ8.β	Δώδεκα δια δύο είναι…Πρέπει να πολλαπλασιάσω το 12 με έναν αριθμό και να βρω 6. Είναι το μισό, ένα δεύτερο.
Κ9	Το αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με 1/2, 1/3, 1/4.
Κ10	Θα πάρω το διπλάσιο και τότε θα διαιρέσω το 12 με το 2, το τριπλάσιο και τότε με το 3 και στο τετραπλάσιο με το 4.
Κ11	Αυτό το 2 εδώ *(Σμ)* είναι ο παρονομαστής εδώ *(Σα)*. Το ίδιο με το 3 εδώ *(Σμ)* και εδώ *(Σα)*.
Σημείωση: *μ: Μονάδα μέτρησης, α: αριθμητικό αποτέλεσμα μέτρησης, Σμ, Σα: συντελεστής αλλαγής της μονάδας και του αποτελέσματος αντ.*	

Πίνακας 1: Ο Κοσμάς πραγματεύεται τις μεταβολές της μονάδας και του αριθμητικού αποτελέσματος της μέτρησης και τη μεταξύ τους σχέση

Στο Κ5, η αύξηση του α περιγράφεται πολλαπλασιαστικά μέσω του Σμ, ενώ η μείωση του μ χωρίς τη χρήση Σμ. Στο Κ6, ο Κοσμάς επανήλθε στον ρόλο του παρονομαστή του Σμ, συνδέοντας στοιχειωδώς με τον συντελεστή αλλαγής του αποτελέσματος. Συνεχίζοντας στην περίπτωση της αύξησης του μ, ο Κοσμάς διατύπωσε αρχικά ποιοτικά τη σχέση μεταξύ των κατευθύνσεων των δύο μεταβολών (Κ7). Στη συνέχεια, περιέγραψε με μεγαλύτερη ακρίβεια τις μεταβολές, εκφράζοντας τη μείωση με διαίρεση (Κ8.α). Η έκφραση της μείωσης με πολλαπλασιασμό δε γίνεται άμεσα από το παιδί (Κ8.β), το οδηγεί όμως στην πρώτη έκφραση των μειώσεων του α με συντελεστές (Κ9), για να επιστρέψει, σχεδόν άμεσα, στην αρχική του διατύπωση (Κ10). Τέλος, παρατηρεί τη σχέση ανάμεσα στο Σμ και τον παρονομαστή του Σα, χωρίς να αναγνωρίσει ότι πρόκειται για αντίστροφους αριθμούς. Η αναγνώριση αυτή, για τον Κοσμά, συνέβη στο Β μέρος («Τώρα το κατάλαβα ότι είναι ο αντίστροφος, εδώ είχαμε 3 και 1/3, εδώ 1/2 και 2»), οπότε και άρχισε να το αξιοποιεί πιο συστηματικά.

Κοινές δυσκολίες αντιμετώπισαν τα παιδιά στο πλαίσιο της μέτρησης, όταν ο διαιρέτης ήταν μεγαλύτερος από τον διαιρετέο (Β3), και όταν ο διαιρέτης ήταν μη μοναδιαίο κλάσμα (μέρος Δ). Για παράδειγμα, ο Κοσμάς στο Β3 ήταν πλέον σε θέση να αποδώσει λεκτικά το νόημα της διαίρεσης μέτρησης για την πράξη 4:7 αλλά και να προβλέψει ότι «χωράει πιο λίγες φορές από μία». Για να εξηγήσει, όμως, την απάντησή του με το υλικό, χρησιμοποίησε τη λωρίδα με το μικρότερο μήκος ως μονάδα μέτρησης. Χρειάστηκε παρέμβαση («Με τι μετράς; Ποια είναι η μονάδα μέτρησης;») για να αντιστρέψει τις λωρίδες, και να καταλήξει στη διαπίστωση ότι «χωράνε τα 4 από τα 7», εκφράζοντας τελικά το πηλίκο ως κλάσμα.

Στο μέρος Δ, όταν ο Κοσμάς και τα άλλα παιδιά δοκίμασαν με το υλικό τους να μετρήσουν το 8 με μονάδα τα 2/3, ανταποκρίθηκαν με τον ίδιο τρόπο: Αρχικά, διαμέρισαν κάθε μονάδα του ακέραιου σε τρία ίσα μέρη που καταμετρήθηκαν συνολικά (μέτρηση με το 1/3). Μετά από παρέμβαση («Ποια είναι η μονάδα μέτρησης;»), σκίασαν και καταμέτρησαν τα δύο τρίτα κάθε μονάδας ξεχωριστά, παραλείποντας ένα τρίτο ανά μονάδα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, στο μέρος Δ, ο Κοσμάς εξέφρασε μια λανθασμένη ερμηνεία για τη διαίρεση με κλάσμα, διαφορετική από αυτήν της Φάσης Ι:

> Έχουμε το 8 δια το $\frac{1}{2}$, το οποίο σημαίνει μισό, άρα 8 δια το μισό του, το οποίο είναι το 4 (…) 8 δια 4 ίσον 2.

Ολοκληρώνοντας τη μέτρηση (χωρίς δυσκολία), το παιδί αυθόρμητα σύγκρινε το αποτέλεσμα με την αρχική του απάντηση, δοκιμάζοντας μια γνωστική σύγκρουση («Μα δεν είναι και 2;»). Στο τέλος της Φάσης ΙΙΙ, φάνηκε ότι η σύγκρουση αυτή είχε επιλυθεί, καθώς το παιδί δήλωσε ότι (στην αρχή) «τα έκανε όλα λάθος» και ότι «τώρα ξέρει ότι βγαίνει πιο πολύ».

Φάση ΙΙΙ

Στη Φάση ΙΙΙ, όλα τα παιδιά ήταν σε θέση να εκφράσουν λεκτικά το νόημα της διαίρεσης με ακέραιο ή κλασματικό διαιρέτη ως μέτρηση. Οι λανθασμένες επιλογές στην αναγνώριση προβλημάτων διαίρεσης με κλάσμα, μειώθηκαν για όλα τα παιδιά και μηδενίστηκαν για τον Κοσμά που, επιπλέον, διατύπωσε και ένα πρόβλημα διαίρεσης με διαιρέτη το 1/2:

> Έχουμε μια σοκολάτα και τη χωρίζουμε σε 6 κομμάτια. Και όπως είναι το ένα κομμάτι θα το κόψουμε άλλη μια φορά στη μέση, το κάθε κομμάτι, και θα δούμε πόσα κομμάτια έχει τώρα η σοκολάτα.

Ήδη από τη Φάση ΙΙ, όλα τα παιδιά, εκτός από τον Κοσμά, υπολόγιζαν πηλίκα με κλασματικό διαιρέτη αναφερόμενα ρητά στη μέθοδο της «αντιστάθμισης»:

> Διαιρώ το 6 με το 1 και το αποτέλεσμα είναι 6. Μετά αλλάζω το διαιρέτη, τον πολλαπλασιάζω με 2/3. Άρα, το αποτέλεσμα θα πολλαπλασιαστεί με το 3/2.

Ο Κοσμάς συστηματικά στρεφόταν στη μέτρηση με το υλικό, στρατηγική που ακολούθησε και στη Φάση ΙΙΙ, κάτι που τον εμπόδισε να ολοκληρώσει τη διαίρεση δύο κλασμάτων.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ -ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα ευρήματα της Φάσης Ι έδειξαν ότι το μόνο διαθέσιμο στα παιδιά νόημα για τη διαίρεση ήταν αυτό της «δίκαιης μοιρασιάς» (Tirosh, 2010). Τα παιδιά έδειξαν εξαιρετικά φτωχή κατανόηση, αλλά και διαδικαστική ευχέρεια για τη διαίρεση κλασμάτων, μετά τη διδασκαλία στο σχολείο. Στη Φάση ΙΙ αποκαλύφθηκαν και περιορισμοί σχετικά με έννοιες και διαδικασίες της μέτρησης, καθώς τα παιδιά δεν μπορούσαν να διανοηθούν τη μέτρηση με μονάδα μεγαλύτερη από το δεδομένο μέγεθος και παραβίασαν μια βασική αρχή της μέτρησης (*οι μονάδες πρέπει να καλύπτουν το μήκος*) όταν χρειάστηκε να μετρήσουν με ένα μη μοναδιαίο κλάσμα. Και στις δύο φάσεις ήταν έκδηλη η δυσκολία των παιδιών να ερμηνεύσουν τον πολλαπλασιασμό κλασμάτων ή να χρησιμοποιήσουν το κλάσμα ως τελεστή (Ma, 1999).

Στη Φάση ΙΙ διαπιστώσαμε ότι η πραγμάτευση της κατάστασης αλλαγής της μονάδας ήταν εφικτή στα παιδιά, παρά το γεγονός ότι δεν τους ήταν εξαρχής οικεία, ούτε είχαν εκτεθεί σε τυπική διδασκαλία για τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά. Παρατηρήθηκε μετατόπιση σε πιο εκλεπτυσμένους τρόπους περιγραφής της κατάστασης (χρήση συντελεστών μεταβολής, αναφορές στους αντίστροφους αριθμούς), που όμως απαίτησε συχνές παρεμβάσεις από την ερευνήτρια. Τέλος, από τη Φάση ΙΙΙ φάνηκε ότι τα παιδιά ανέπτυξαν, σε μεγάλο βαθμό, το νόημα της διαίρεσης ως μέτρηση, ενώ τρία από αυτά υιοθέτησαν και τη μέθοδο της «αντιστάθμισης» για να υπολογίσουν πηλίκα. Βελτίωση παρατηρήθηκε και στην αναγνώριση προβλημάτων διαίρεσης με κλασματικό διαιρέτη, παρά το γεγονός ότι αυτό δεν αποτέλεσε μέρος της παρέμβασης. Ειδικότερα, ο Κοσμάς κατάφερε όχι μόνο να αναγνωρίσει σωστά όλα τα προβλήματα, αλλά και να διατυπώσει ένα δικό του.

Τα ευρήματα αυτά θα αξιοποιηθούν για τον επανασχεδιασμό της ακολουθίας δραστηριοτήτων και την εφαρμογή της εκ νέου, όπως προβλέπεται από τη μεθοδολογία την οποία υιοθετήσαμε (Gravemeijer & Prediger, 2019). Μεγαλύτερη έμφαση στο πλαίσιο της μέτρησης, αλλά και στον πολλαπλασιασμό με κλάσμα φαίνεται να είναι απαραίτητη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Cavey, L. O., & Kinzel, M. T. (2014). From whole numbers to invert and multiply. *Teaching children mathematics*, *20*(6), 374-383.

Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fraction operations: results from a national sample of elementary school teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 1-21.

Fredua-Kwarteng, E., & Ahia, F. (2006). Understanding division of fractions: an alternative view. Retrieved from https://eric.ed.gov/?id=ED493746

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). Reston, Virginia: NCTM.

Gregg, J., & Gregg, D. U. (2007). Measurement and fair-sharing models for dividing fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *12*(9), 490-496.

Li, Y. (2008). What do students need to learn about division of fractions? *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(9), 546-552.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gravemeijer, K., & Prediger, S. (2019). Topic-specific design research: an introduction. In G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education* (pp. 33-58). Cham, Switzerland: SpringerOpen.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(1), 5-25.