



ΠΡΑΚΤΙΚΑ

9ου ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΥ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ ΕΝΩΣΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.)

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΠΡΟΣΤΑ ΣΕ
ΝΕΕΣ ΚΑΙ ΠΑΛΙΕΣ ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

3-5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΕΝΕΔΙΜ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΑ
ΤΜΗΜΑΤΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:

Β. ΧΡΥΣΙΚΟΥ
Χ. ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΥ
Τ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗΣ
Κ. ΧΑΤΖΗΚΥΡΙΑΚΟΥ
Α. ΧΡΟΝΑΚΗ
Κ. ΣΔΡΟΛΙΑΣ



ΕΝΕΔΙΜ, 2022

**Εν.Ε.Δι.Μ.
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΑ ΤΜΗΜΑΤΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**

ΠΡΑΚΤΙΚΑ

9ου Πανελλήνιου Συνεδρίου
της Ένωσης Ερευνητών
Διδακτικής των Μαθηματικών

**Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΜΠΡΟΣΤΑ
ΣΕ ΝΕΕΣ ΚΑΙ ΠΑΛΙΕΣ ΠΡΟΚΛΗΣΕΙΣ**

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Β. ΧΡΥΣΙΚΟΥ, Χ. ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΥ, Τ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗΣ,
Κ. ΧΑΤΖΗΚΥΡΙΑΚΟΥ, Α. ΧΡΟΝΑΚΗ, Κ. ΣΔΡΟΛΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

3-5 Ιουνίου 2022

Αναφορά ως

Β. Χρυσικού, Χ. Σταθοπούλου, Τ. Τριανταφυλλίδης, Κ. Χατζηκυριάκου, Α. Χρονάκη, & Κ. Σδρόλιας (Επιμ.). *Πρακτικά του 9ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ.: Η μαθηματική εκπαίδευση μπροστά σε νέες και παλιές προκλήσεις*. Βόλος: ΕΝΕΔΙΜ

ISBN: 978-618-82277-2-9

Copyright © 2022 ΕΝΕΔΙΜ & ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Οργάνωση Ύλης: Β. Χρυσικού

Γραφιστική Επιμέλεια: Β. Κατσιγιαννάκης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ: ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ ΕΝΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

Κατσομήτρος Σωτήριος, Τάτσης Κωνσταντίνος.....	249
Η ΓΝΩΣΗ ΚΑΙ Η ΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ	
Τερζάκη Ευαγγελία, Λεμονίδης Χαράλαμπος	258
ΜΑΘΗΤΕΣ 'ΕΠΑΝΕΦΕΥΡΟΥΝ' ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΑΝΟΙΚΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗΣ	
Κωνσταντίνου Γιάννης, Τριανταφύλλου Χρυσανγή	267
«ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΗΚΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΚΥΚΛΟΥΣ» - ΜΙΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΕ ΨΗΦΙΑΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ	
Μπαλωμένου Αθανασία	277
ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΜΙΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΤΙΚΗ ΠΡΟΟΠΤΙΚΗ	
Δάλλας Μάρκος	286
ΝΟΕΡΕΣ ΑΦΑΙΡΕΣΕΙΣ ΑΠΟ ΠΑΙΔΙΑ ΚΑΙ ΕΝΗΛΙΚΕΣ: ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ	
Δεσλή Δέσποινα.....	296
ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΝΙΣΧΥΣΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΓΝΩΣΗΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	
Βισσαρίου Αικατερίνη, Δεσλή Δέσποινα	306
ΠΡΟΤΑΣΗ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	
Βισσαρίου Αικατερίνη, Δεσλή Δέσποινα	316
ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ: ΜΙΑ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ	
Κόπτη Ιωάννα, Χρήστου Κωνσταντίνος, Βαμβακούση Ξένια	326
ΠΤΥΧΕΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ: ΜΙΑ ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ	
Αυγέρη Θεοδώρα, Βαμβακούση Ξένια.....	336
ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟΙ ΧΑΡΤΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΑΙΣΘΗΣΗΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ	
Γεωργιάδης Βασίλειος Χρήστος, Χρήστου Κωνσταντίνος.....	346
Η ΔΙΠΛΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΠΡΟΚΑΤΑΛΗΨΗΣ ΤΟΥ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ -Η ΑΚΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ	
Κύρβη Δέσποινα-Ιωάννα, Βαμβακούση Ξένια, Χρήστου Κωνσταντίνος	356

Η ΔΙΠΛΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΠΡΟΚΑΤΑΛΗΨΗΣ ΤΟΥ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ –Η ΑΚΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Κύρβη Δέσποινα-Ιωάννα¹, Βαμβακούση Ξένια²,
Χρήστου Κωνσταντίνος¹

¹Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, ²Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
djoannaky@gmail.com, xvamvak@uoi.gr, kchristou@uowm.com

Η παρούσα εργασία μελετά τις αντιλήψεις των μαθητών για τις αριθμητικές τιμές που μπορούν να αποδοθούν σε μεταβλητές και αλγεβρικές παραστάσεις. 138 μαθητές Γυμνασίου κλήθηκαν να αξιολογήσουν 48 ισχυρισμούς σχετικά με αριθμούς που γίνεται ή δεν γίνεται να αναπαραστήσουν έξι αλγεβρικές παραστάσεις που περιείχαν μεταβλητές (π.χ. $-\beta$, $\kappa+3$). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές έτειναν να συμφωνούν με τους ισχυρισμούς που ήταν συμβατοί με τη διαίσθησή τους ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς (ακεραιότητα) και ότι αναπαριστούν αριθμούς του ίδιου προσήμου με το φαινομενικό πρόσημο της κάθε παράστασης. Η επίδραση της ακεραιότητας ήταν πιο ισχυρή από αυτή του φαινομενικού προσήμου στις αντιλήψεις τους.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΚΑΙ ΕΜΠΕΙΡΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής αποτελεί μία ευρέως διαδεδομένη δυσκολία της μετάβασης των μαθητών από την αριθμητική στην Άλγεβρα (Wagner & Kieran, 2018). Οι μεταβλητές στην Άλγεβρα αναπαρίστανται με γράμματα από την αλφάβητο. Προηγούμενες μελέτες έδειξαν ότι οι μαθητές έχουν την τάση αρχικά να παρερμηνεύουν τα γράμματα στην Άλγεβρα ως συντομογραφίες ονομάτων ή πραγμάτων, ως ετικέτες ή αντικείμενα (β =βάρκες), ή ακόμη κι ως αριθμούς κωδικοποιημένους έτσι ώστε να υπάρχει αντιστοιχία με τη θέση τους στο αλφάβητο (π.χ., $b=2$) (Kuchemann, 1981; Booth, 1984; Khalid, Yakor & Ibrahim, 2020). Παρ' όλο που οι μαθητές εγκαταλείπουν τέτοιου είδους λάθη μέχρι την (αντίστοιχη) Α' Λυκείου, κάποιες άλλες δυσκολίες ανακύπτουν, οι οποίες είναι πιο δύσκολο να ξεπεραστούν ακόμα και ύστερα από στοχευμένη διδασκαλία (Booth, 1984). Μια τέτοια δυσκολία είναι να δεχθούν ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν ένα εύρος αριθμητικών τιμών και δεν είναι σύμβολα που αναπαριστούν μόνο έναν συγκεκριμένο, άγνωστο αριθμό (Booth, 1984; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens, 2005; Asquith, Stephens, Knuth & Alibali, 2007).

Ένα ερώτημα το οποίο μόνο πρόσφατα διερευνήθηκε είναι τι συμβαίνει όταν οι μαθητές αντιλαμβάνονται πως τα αλφαβητικά σύμβολα αναπαριστούν περισσότερες από μία αριθμητικές τιμές: Είναι διατεθειμένοι να δεχτούν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό ως τιμή μιας μεταβλητής; Για να απαντήσουν σε αυτό το ερώτημα οι Χρήστου και Βοσνιαδού (2009, 2012) χρησιμοποίησαν το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, σύμφωνα με το οποίο πριν έρθουν σε επαφή με τους μη-φυσικούς αριθμούς, οι μαθητές έχουν κατασκευάσει μια καλά οργανωμένη θεωρία για τον αριθμό που προέκυψε από την εμπειρία τους με τους φυσικούς αριθμούς, μέσα και έξω από τη σχολική τάξη. Αυτή η αρχική κατανόηση για τον αριθμό επηρεάζει τις αντιλήψεις και τις προσδοκίες τους σχετικά με το τί είναι ο αριθμός και πώς αυτός λειτουργεί, προκαλώντας φαινόμενα όπως η προκατάληψη του φυσικού αριθμού (Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008). Ως *προκατάληψη του φυσικού αριθμού* (ΠΦΑ) χαρακτηρίζεται η τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν την γνώση τους για τους αριθμούς – η οποία θέλει τους αριθμούς να έχουν ιδιότητες φυσικού αριθμού – σε περιπτώσεις όπου αυτή η γνώση δε μπορεί να εφαρμοστεί, όπως όταν εμπλέκονται ρητοί και πραγματικοί αριθμοί (Ni & Zhou, 2005). Λόγω της ΠΦΑ, οι μαθητές συχνά έχουν την τάση να θεωρούν, για παράδειγμα, ότι δεκαδικοί με περισσότερα ψηφία είναι μεγαλύτεροι, ότι τα κλάσματα με μεγαλύτερους όρους έχουν και μεγαλύτερη αξία, ή ότι ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει ενώ η διαίρεση πάντα μικραίνει τους αρχικούς όρους της πράξης (Ni & Zhou, 2005; Vosniadou et al., 2008; Christou & Vosniadou, 2012).

Μέσα από μια σειρά μελετών ο Χρήστου και οι συνεργάτες του (Christou, Vosniadou & Vamvakoussi, 2007; Christou & Vosniadou, 2012) διερεύνησαν την υπόθεση ότι η προκατάληψη του φυσικού αριθμού θα επηρέαζε τους μαθητές να θεωρούν ότι τα γράμματα που χρησιμοποιούνται ως σύμβολα μεταβλητών σε αλγεβρικές παραστάσεις αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς, κι όχι κάθε ρητό ή και πραγματικό αριθμό. Η υπόθεση αυτή εξετάστηκε σε προηγούμενες μελέτες χρησιμοποιώντας ερωτήσεις ανοιχτού τύπου, όπου οι μαθητές κλήθηκαν να δώσουν αριθμητικές τιμές που θεωρούσαν ότι μπορούν να αποδοθούν σε δοσμένες αλγεβρικές παραστάσεις που περιείχαν μεταβλητές. Η πλειονότητα των μαθητών εμφάνισε την τάση να αποδίδει μόνο φυσικούς αριθμούς στις μεταβλητές των παραστάσεων, απαντώντας, για παράδειγμα, ότι το a μπορεί να πάρει τιμές τους φυσικούς αριθμούς (1, 2, 3,...), το $-b$ αρνητικούς ακεραίους (-1, -2, -3,...) και το $k+3$ φυσικούς αριθμούς μεγαλύτερους του 3 (4, 5, 6,...). Παρόλο που οι απαντήσεις αυτές δεν ήταν λανθασμένες, κατέδειξαν την τάση των μαθητών να θεωρούν ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν μόνο φυσικούς

αριθμούς. Επιπλέον, όταν οι μαθητές ρωτήθηκαν ποιοι αριθμοί (αν υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί) δεν μπορούν να αναπαραστήσουν οι ίδιες αλγεβρικές παραστάσεις, η πλειονότητα αντικατέστησε τις μεταβλητές με αρνητικούς ακεραίους, απαντώντας ότι το $-\beta$ δεν μπορεί να πάρει τιμές όπως 1, 2, 3 ή ότι οι αριθμοί -1, -2, -3 δεν μπορούν να αποδοθούν στο α (Christou & Vosniadou, 2012). Αντίστοιχα αποτελέσματα προέκυψαν και από ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής (Christou & Vosniadou, 2007) όπου οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους ένα σύνολο από θετικούς, αρνητικούς ακέραιους και ρητούς αριθμούς για να επιλέξουν εκείνους (αν υπάρχουν) που θεωρούσαν ότι δεν μπορούν να αποδοθούν σε συγκεκριμένες αλγεβρικές παραστάσεις. Ένα κοινό μοτίβο απαντήσεων έδειξε συστηματικό αποκλεισμό αριθμών που δεν μπορούσαν να προκύψουν από την αντικατάσταση των γραμμάτων με φυσικούς αριθμούς. Ένα άλλο μοτίβο, ωστόσο, έδειξε συστηματικό αποκλεισμό θετικών αριθμών (είτε φυσικών είτε μη-φυσικών), όταν η έκφραση είχε εμφανές αρνητικό πρόσημο (π.χ. $-\beta$) και αρνητικών όταν η παράσταση εμφανιζόταν να έχει θετικό πρόσημο (π.χ., $k+3$). Οι αλγεβρικές παραστάσεις γενικά μπορεί να παίρνουν είτε θετικές είτε αρνητικές τιμές, ανεξάρτητα από το πρόσημο που φαίνεται να έχουν. Για παράδειγμα, το $-\beta$ θα μπορούσε να πάρει και θετικές τιμές, αν αρνητικές τιμές αντικατασταθούν στο β . Τα παραπάνω ευρήματα ενισχύθηκαν περαιτέρω από μια αναπαραγωγική μελέτη με Φλαμανδούς μαθητές (Van Dooren, Christou & Vamvakoussi, 2010).

Ένας άλλος τρόπος να ερμηνευτεί το παραπάνω εύρημα είναι ότι οι μαθητές προ-αποφασίζουν το πρόσημο των τιμών που μπορεί να αναπαραστήσει μια παράσταση με βάση την παρουσία ή όχι αρνητικών πρόσημων σε αυτή (έτσι το $-\beta$ ερμηνεύεται ως μια αρνητική παράσταση). Αυτό συμβαδίζει με προηγούμενες μελέτες που έδειχναν την τάση των μαθητών να παρερμηνεύουν το αρνητικό σύμβολο μιας παράστασης ως σύμβολο αρνητικότητας (βλ. Vlassis, 2004). Αυτό θα μπορούσε να αναγνωριστεί ως μια έμμεση συνέπεια της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, καθώς θα μπορούσε να είναι αποτέλεσμα της διατήρησης (τουλάχιστον) ενός χαρακτηριστικού της πιο στοιχειώδους ερμηνείας των γραμμάτων ως φυσικών αριθμών, αυτό της θετικότητας. Έτσι, θα μπορούσε να επιτραπεί στο $k+3$ να λάβει μη-φυσικές τιμές, υπό την προϋπόθεση όμως ότι αυτές θα είναι θετικές (π.χ., 3,5). Ομοίως, θα μπορούσε να επιτραπεί στο $-\beta$ να λάβει μη-φυσικές τιμές, υπό την προϋπόθεση ότι θα είναι αρνητικές (π.χ. -0,5).

Τα παραπάνω αποτελέσματα έδωσαν κάποιες αρχικές εμπειρικές ενδείξεις ότι η ΠΦΑ επηρεάζει την κατανόηση της χρήσης μεταβλητών στην Άλγεβρα με δύο βασικούς τρόπους: α) επηρεάζει τους μαθητές να αντιλαμβάνονται τα αλφαβητικά σύμβολα ως σύμβολα που αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς κι όχι οποιονδήποτε ρητό ή πραγματικό αριθμό, όπως

έχουν διδαχθεί (παράγοντας ακεραιότητας). β) τους επηρεάζει να θεωρούν ότι το φαινομενικό πρόσημο μιας αλγεβρικής παράστασης είναι το πρόσημο των αριθμών που αυτή μπορεί να αναπαραστήσει (παράγοντας φαινομενικού προσήμου).

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να εξετάσει περαιτέρω αυτή τη διπλή επίδραση της ΠΦΑ, χρησιμοποιώντας μια διαφορετική μεθοδολογία από τις προηγούμενες σχετικές έρευνες. Στην παρούσα μελέτη, αντί να αποδώσουν ή να απορρίψουν συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές ως τιμές που μπορεί ή δεν μπορεί να αναπαραστήσει μια αλγεβρική παράσταση, ζητήθηκε από τους μαθητές να αξιολογήσουν την ισχύ μιας σειράς ισχυρισμών σχετικά με τις τιμές που μπορούν να αποδοθούν σε δοσμένες παραστάσεις. Με αυτόν τον τρόπο θα μπορούσε να μελετηθεί και η επίδραση της μορφής της αλγεβρικής παράστασης κατά την ερμηνεία των μεταβλητών. Πιο συγκεκριμένα, πώς επηρεάζεται από τη μορφή της παράστασης, ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές τη συνδέουν με τις αριθμητικές τιμές που θα μπορούσε εκείνη να πάρει. Αν, δηλαδή, η ακέραια (π.χ., $k+3$) ή η κλασματική μορφή μιας αλγεβρικής παράστασης (π.χ. $4/5y$), και αντίστοιχα η «θετική» (π.χ. $4/5y$) και η «αρνητική» μορφή της (π.χ. $-4/5y$) επηρεάζει τις αριθμητικές τιμές που μπορεί να πάρει. Σκεφτήκαμε ότι οι μαθητές που θα αποδέχονταν μια μη-φυσική τιμή σε μια παράσταση που μοιάζει ακέραια (π.χ., $k+3$), θα μπορούσαν να δώσουν μόνο κλασματικές τιμές στην περίπτωση μιας παράστασης που μοιάζει κλασματική (π.χ. $4/5y$), είτε επειδή επιστρέφουν στην ερμηνεία των γραμμάτων ως φυσικούς αριθμούς, όταν η έκφραση είναι πιο σύνθετη, είτε επειδή η μορφή της έκφρασης τους κατευθύνει προς κλασματικές τιμές.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Συμμετέχοντες

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν συνολικά 138 μαθητές από δημόσια Γυμνάσια του Ν. Σερρών. Από αυτούς, 68 ήταν μαθητές της Β' τάξης και 70 μαθητές της Γ' (Μ.Ο. ηλικίας: $14,52 \pm 77$ δήλωσαν κορίτσια). Η προαναφερθείσα ηλικιακή ομάδα επιλέχθηκε διότι έχει προηγουμένως διδαχθεί όλες τις έννοιες και διαδικασίες οι οποίες χρειάζονται για να διαχειριστεί το υλικό του ερωτηματολογίου. Οι συμμετέχοντες συγκεκριμένα έχουν ήδη έρθει σε επαφή με την μεταβλητή ήδη από την Στ' τάξη του, κι έχουν εμπειρία με ρητούς αριθμούς από την Δ' τάξη του Δημοτικού.

Υλικά

Στους μαθητές της έρευνας δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο με 48 προτάσεις σχετικές με την αριθμητική τιμή που μπορεί (ή δεν μπορεί) να πάρει μια αλγεβρική έκφραση. Κάθε μια από τις προτάσεις, την ισχύ των οποίων

κλήθηκαν να αξιολογήσουν οι μαθητές, παρουσίαζε μία από τις έξι παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις: α , $-\beta$, $\kappa+3$, $-\delta-4$, $4/5\gamma$, $-4/5z$. Σε κάθε μία από τις παραπάνω αποδόθηκαν οχτώ διαφορετικές αριθμητικές τιμές (θετικός ή αρνητικός ακέραιος, θετικός ή αρνητικός ρητός αριθμός - ένας σε κάθε πρόταση). Από τις 48 προτάσεις του ερωτηματολογίου οι μισές ήταν καταφατικά διατυπωμένες (π.χ. *Θα μπορούσε το $-\beta$ να πάρει την τιμή 2*), ενώ οι υπόλοιπες ήταν αρνητικά διατυπωμένες (π.χ. *Δεν θα μπορούσε το $-\beta$ να πάρει την τιμή -8*) ώστε σωστή να είναι η απάντηση «συμφωνώ» στην πρώτη περίπτωση και «διαφωνώ» στη δεύτερη. Οι αρνητικά διατυπωμένες ερωτήσεις συμπεριλήφθηκαν διότι αλλιώς όλες οι ερωτήσεις θα είχαν ως σωστή απάντηση το «συμφωνώ».

Τα παραπάνω είχαν ως αποτέλεσμα να δημιουργηθούν έργα που είναι συμβατά ή μη-συμβατά με τις πεποιθήσεις των μαθητών όσον αφορά τόσο την ακεραιότητα όσο και το πρόσημο των αριθμητικών τιμών που μπορούν να αποδοθούν σε μεταβλητές και αλγεβρικές παραστάσεις. Πιο συγκεκριμένα, οι ισχυρισμοί ήταν: α) συμβατοί με την ακεραιότητα (ΣυμβΑΚ) όταν φυσικοί αριθμοί αποδίδονταν στις μεταβλητές των αλγεβρικών παραστάσεων (π.χ. *θα μπορούσε το α να πάρει την τιμή 6*), β) μη-συμβατοί με την ακεραιότητα (Μη-συμβΑΚ) όταν κλασματικοί ή δεκαδικοί αριθμοί αποδόθηκαν στις μεταβλητές (π.χ. *θα μπορούσε το α να πάρει την τιμή $1/6$*), γ) συμβατοί με το φαινομενικό πρόσημο (ΣυμβΦΠ) όταν ο αριθμός που αποδίδονταν σε μια αλγεβρική παράσταση ήταν αριθμός του ίδιου προσήμου με το φαινομενικό της πρόσημο (π.χ. *θα μπορούσε το $-\beta$ να πάρει την τιμή -2.8*), και δ) μη-συμβατοί με το φαινομενικό πρόσημο (Μη-συμβΦΠ) όταν οι αριθμητικές τιμές είχαν αντίθετο πρόσημο από το φαινομενικό πρόσημο της αντίστοιχης αλγεβρικής παράστασης (π.χ. *θα μπορούσε το $-\beta$ να πάρει την τιμή $4/3$*).

Η παραπάνω κατηγοριοποίηση οδήγησε τελικά στην ταξινόμηση των έργων σε τέσσερις βασικές κατηγορίες αφού κάθε ένας από τους ισχυρισμούς μπορούσε να είναι ταυτόχρονα συμβατός ή μη-συμβατός με την ακεραιότητα και συμβατός ή μη-συμβατός με το φαινομενικό πρόσημο (βλ. Πίνακα 1).

Αποτελέσματα

Οι απαντήσεις των μαθητών βαθμολογήθηκαν ως σωστό (βαθμός 1) ή λάθος (βαθμός 0). Η συμβολική αξιοπιστία του ερωτηματολογίου ήταν καλή (Cronbach's Alpha = 0.738). Έλεγχος της ομοιογένειας της διασποράς με το κριτήριο του Levene, έδειξε ότι δεν υπάρχει στατιστικώς σημαντική διαφορά ανάμεσα στις επιδόσεις των μαθητών που να σχετίζεται με την τάξη [$F(1,134) = 0.088$, $p=.768$]. Η μέση επίδοση των μαθητών υπολογίστηκε σε κάθε κατηγορία έργου και παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.

Κατηγορία έργων	Παράδειγμα
ΣυμβΑΚ/ΣυμβΦΠ	Θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή -4 Δεν θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή -8
ΣυμβΑΚ/Μη-συμβΦΠ	Θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή 2 Δεν θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή 3
Μη-συμβΑΚ/ΣυμβΦΠ	Θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή -2.8 Δεν θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή -1/2
Μη-συμβΑΚ/Μη-συμβΦΠ	Θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή 4/3 Δεν θα μπορούσε το -β να πάρει την τιμή 5/6

Πίνακας 2 – Κατηγορίες έργων συμβατών και μη ως προς την ακεραιότητα και το φαινομενικό πρόσημο.

Οι συνολικές επιδόσεις των μαθητών ήταν υψηλότερες στην κατηγορία ερωτημάτων που ήταν συμβατά με την ακεραιότητα και συμβατά με το φαινομενικό πρόσημο (ΣυμβΑΚ / ΣυμβΦΠ), ενώ οι χαμηλότερες επιδόσεις σημειώθηκαν στα έργα που ήταν αντίθετα με τις διαισθήσεις των μαθητών τόσο για την ακεραιότητα όσο και για το φαινομενικό πρόσημο (Μη-συμβΑΚ / Μη-συμβΦΠ). Ανάλυσης διασποράς επαναλαμβανόμενων μετρήσεων με δύο παράγοντες (ακεραιότητα και φαινομενικό πρόσημο), που έγινε στις παραπάνω μεταβλητές, υποστήριξε την βασική υπόθεση της μελέτης, καθώς έδειξε στατιστικώς σημαντική επίδραση του παράγοντα της ακεραιότητας ($F(1,137) = 106,36$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .44$) όπως επίσης και του φαινομενικού προσήμου ($F(1,137) = 56,36$, $p < .001$, $\eta_p^2 = .29$) στις απαντήσεις των μαθητών στα έργα. Η σύγκριση του μεγέθους επίδρασης η_p^2 κάθε παράγοντα δείχνει ότι η επίδραση της ακεραιότητας εμφανίζεται υψηλότερη από αυτήν του φαινομενικού προσήμου.

Σε μια επιπρόσθετη ανάλυση εξετάστηκε με ποιον τρόπο η μορφή των αλγεβρικών παραστάσεων επηρεάζει τις εκτιμήσεις των μαθητών σχετικά με τους αριθμούς που αυτές μπορούν να αναπαραστήσουν. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές σημείωσαν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στα ΣυμβΦΠ έργα που περιείχαν αλγεβρικές παραστάσεις με ακέραια μορφή (π.χ. α, -β, -δ-4) (Μ.Ο. = 10.31, Τ.Α. = 2.70) σε σχέση με τα αντίστοιχα έργα που περιείχαν παραστάσεις με κλασματική μορφή (π.χ. 4/5y, -4/5z) (Μ.Ο. = 4.18, Τ.Α. = 1.74), [$t(137) = 28.683$, $p < .001$].

	Μ.Ο.	Τ.Σ.	Ελάχιστο	Μέγιστο
ΣυμβΑΚ/ΣυμβΦΠ	8,38	0,190	3	12
ΣυμβΑΚ/Μη-συμβΦΠ	6,01	0,215	0	12
Μη-συμβΑΚ/ΣυμβΦΠ	6,11	0,192	1	12
Μη-συμβΑΚ/Μη-συμβΦΠ	4,89	0,231	0	12

Πίνακας 2: Μέσοι όροι για κάθε κατηγορία συμβατών/ μη-συμβατών έργων με την ακεραιότητα και με το φαινομενικό πρόσημο

Αναφορικά με την επίδραση του φαινομενικού προσήμου που φέρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις, τα αποτελέσματα έδειξαν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στα ΣυμβΑΚ έργα που περιείχαν παραστάσεις θετικού φαινομενικού προσήμου (Μ.Ο. = 13.29, Τ.Α. = 0.331), σε σχέση με τα αντίστοιχα έργα με παραστάσεις αρνητικού φαινομενικού προσήμου (Μ.Ο.= 11.92, Τ.Α.= 0.302), [$t(137) = 4.127$, $p < .001$].

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Σκοπός αυτής της ερευνητικής εργασίας ήταν να μελετήσει τον τρόπο που επιδρούν οι δυο παράγοντες της προκατάληψης του φυσικού αριθμού, η ακεραιότητα και το φαινομενικό πρόσημο, στις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τις αριθμητικές τιμές που μπορούν να πάρουν αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν μεταβλητές, χρησιμοποιώντας μια διαφορετική μεθοδολογία σε σχέση με τις αντίστοιχες προϋπάρχουσες μελέτες. Στην παρούσα έρευνα, ζητήθηκε από μαθητές Γυμνασίου να αξιολογήσουν την ισχύ προτάσεων που αφορούσαν στο τι αριθμητικές τιμές μπορεί ή δεν μπορεί να αναπαραστήσει μια αλγεβρική παράσταση που περιέχει μια μεταβλητή. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν υποστήριξαν τις βασικές υποθέσεις της μελέτης, καθώς τόσο η ακεραιότητα όσο και το φαινομενικό πρόσημο επηρέασαν τις απαντήσεις των μαθητών στα δοσμένα έργα.

Όσον αφορά την επίδραση της ακεραιότητας, οι μαθητές φάνηκε να σημειώνουν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στους ισχυρισμούς εκείνους που ήταν σύμφωνοι με τις διαισθητικές αντιλήψεις τους ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς (π.χ. το $\kappa+3$ μπορεί να πάρει την τιμή 9), παρά σε ισχυρισμούς αντίθετους με την παραπάνω ιδέα (π.χ. το $\kappa+3$ μπορεί να πάρει την τιμή 4/5). Επιπλέον, οι μαθητές φάνηκαν λιγότερο διατεθειμένοι να δεχθούν ακέραιες τιμές ως τιμές που μπορούν να αναπαραστήσουν κλασματικής μορφής αλγεβρικές παραστάσεις όπως η 4/5y, παρά να δεχθούν ρητούς αριθμούς ως τιμές που μπορούν να αναπαραστήσουν ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις όπως η $-β$. Τα παραπάνω αποτελέσματα ενισχύουν τα ευρήματα των

προϋπάρχουσων σχετικών ερευνών (Christou et al., 2007; Christou & Vosniadou, 2012; Van Dooren et al., 2010).

Όσον αφορά την επίδραση του φαινομενικού προσήμου, οι μαθητές φάνηκε να σημειώνουν στατιστικώς σημαντικά υψηλότερες επιδόσεις στα έργα/ισχυρισμούς που ήταν συμβατά με την αντίληψη ότι οι αριθμοί που μπορεί να αναπαριστά μια αλγεβρική παράσταση οφείλουν να είναι αριθμοί του ίδιου προσήμου με το φαινομενικό πρόσημο της παράστασης (π.χ. το $\kappa+3$ δεν μπορεί να πάρει την τιμή -1), σε σύγκριση με τους ισχυρισμούς εκείνους που ήταν μη συμβατοί με την παραπάνω λογική (π.χ. το $\kappa+3$ δεν μπορεί να πάρει την τιμή 5). Επιπροσθέτως, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές φάνηκαν περισσότερο διατεθειμένοι να δεχθούν αρνητικές τιμές ως τιμές που μπορούν να αναπαραστήσουν οι παραστάσεις θετικού φαινομενικού προσήμου (π.χ. $\kappa+3$), παρά να δεχθούν θετικούς αριθμούς ως τιμές που αναπαριστούν αλγεβρικές παραστάσεις που φαίνονταν να είναι αρνητικές (π.χ. $-\delta-4$). Τα παραπάνω έρχονται σε σύγκλιση με προϋπάρχοντα ευρήματα της βιβλιογραφίας σύμφωνα με τα οποία οι μαθητές δείχνουν να επηρεάζονται περισσότερο από το αρνητικό φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων, παρά από το αντίστοιχο θετικό, και να το ερμηνεύουν ως σύμβολο αρνητικότητας (βλ. Vlassis, 2004). Η σύγκριση του μεγέθους επίδρασης των δύο παραγόντων (ακεραιότητα & φαινομενικό πρόσημο) έδειξε ότι οι μαθητές ήταν πιο διατεθειμένοι να δεχθούν τιμές με διαφορετικό πρόσημο από το φαινομενικό πρόσημο της παράστασης από το να δεχθούν μη φυσικούς αριθμούς ως τιμές των μεταβλητών.

Οι προαναφερθείσες παρανοήσεις προκαλούν λάθη και δυσκολίες κατά την εφαρμογή σε συγκεκριμένα μαθηματικά πλαίσια, όπως στη δυσκολία κατασκευής γραφικών παραστάσεων από συναρτήσεις αλλά και στη λύση ισοτήτων και ανισοτήτων με αλγεβρικές παραστάσεις σε τετραγωνικές ρίζες και σε απόλυτες τιμές (Χρήστου & Βοσνιάδου, 2009). Η διδασκαλία που θα δίνει με ρητό τρόπο έμφαση στη σύνδεση μεταξύ μεταβλητών και αριθμητικών τιμών θα μπορούσε να ενισχύσει την κατανόηση του πραγματικού εύρους των τιμών που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή και μια αλγεβρική παράσταση. Ωστόσο, η διόρθωση των παραπάνω παρερμηνειών δεν αναμένεται να είναι μια εύκολη διαδικασία. Για να κατανοήσουν την έννοια της μεταβλητής ως σύμβολο που αναπαριστά οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό, οι μαθητές θα πρέπει να ξεπεράσουν την ΠΦΑ και να διευρύνουν το εννοιολογικό τους πεδίο για τον αριθμό, πέρα από τους φυσικούς αριθμούς. Αυτό απαιτεί αναδιοργάνωση της προϋπάρχουσας γνώσης τους για τον αριθμό ως φυσικός αριθμός, που είναι μια γνώση εδραιωμένη μέσα από την εμπειρία και επιβεβαιωμένη ακόμα κι από τη συστηματική διδασκαλία τα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης (Vosniadou et al., 2008). Αναμένεται, έτσι, να είναι μια

σταδιακή και μακροπρόθεσμη διαδικασία η οποία απαιτεί τη συστηματική υποστήριξη των μαθητών σε αυτό τον στόχο. Σημαντικός σε αυτήν την κατεύθυνση είναι ο ρόλος των εκπαιδευτικών που οφείλουν να είναι ενημερωμένοι για την ΠΦΑ και τις δυσκολίες που αυτή δημιουργεί. Με αυτόν τον τρόπο θα μπορούν να οργανώσουν με κατάλληλο τρόπο τις διδακτικές τους προσεγγίσεις, αφενός πριμοδοτώντας τις κατάλληλες διαδικασίες που συμβάλουν στη μάθηση της μεταβλητής ως σύμβολο που αναπαριστά οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό και αφετέρου αποφεύγοντας την αναπαραγωγή των ιδεών εκείνων που ενισχύουν την αρχική κατανόηση των μαθητών που θέλει τη μεταβλητή να είναι ένας φυσικός αριθμός.

Σε αυτή την κατεύθυνση θα πρέπει να γίνουν και αλλαγές στα διδακτικά εγχειρίδια, που αποτελούν βασικά εργαλεία για τον εκπαιδευτικό. Προηγούμενη μελέτη έδειξε ότι στα βιβλία του Γυμνασίου δεν γίνεται ρητή αναφορά ούτε δίνονται επαρκή παραδείγματα που να δείχνουν το εύρος των πραγματικών τιμών που μπορούν να αναπαραστήσουν οι μεταβλητές και οι αλγεβρικές παραστάσεις στις οποίες εμφανίζονται. (Δημητρακοπούλου & Χρήστου, 2018).

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: Equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 249–272.
- Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Berkshire: NFER-Nelson.
- Christou, K. P., & Vosniadou, S. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. *Mathematical Thinking and Learning*, 14(1), 1–27.
- Christou, K. P., Vosniadou, S., & Vamvakoussi, X. (2007). Students' interpretations of literal symbols in algebra. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Re-Framing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction* (pp. 283–297). Elsevier Press.
- Khalid, M., Yakop, F. H., & Ibrahim, H. (2020). Year 7 Students' Interpretation of Letters and Symbols in Solving Routine Algebraic Problems. *The Qualitative Report*, 25(11), 4167–4181.
- Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school understanding of core algebraic concepts: Equivalence and variable. *International Reviews on Mathematical Education*, 37(1), 68–76.

- Kuchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16*. (pp. 102–119). John Murray.
- Ni, Y. J., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27–52.
- Van Dooren, W., Christou, K. P., & Vamvakoussi, X. (2010). Greek and Flemish students' interpretation of the literal symbols as variables. In M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Mathematics in different settings – Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 257–264). PME.
- Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. *Learning and instruction*, 14(5), 469-484.
- Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, E. (2008). The framework theory approach to conceptual change. In S. Vosniadou (Ed.), *Handbook of research on conceptual change* (pp. 3–34). Lawrence Erlbaum Associates.
- Wagner, S., & Kieran, C. (2018). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra: The Research Agenda for Mathematics Education, Volume 4*. Routledge.
- Δημητρακοπούλου, Στ. Α., & Χρήστου, Κ. Π. (2018). Τα γράμματα-μεταβλητές: Πώς τα κατανοούν οι μαθητές και πώς εμφανίζονται στα βιβλία Μαθηματικών του Γυμνασίου. *Έρευνα Στη Διδακτική Των Μαθηματικών*, 11, 31–52.
- Χρήστου, Κ. Π., & Βοσνιάδου, Σ. (2009). Η παρερμηνεία του φαινομενικού προσήμου των αλγεβρικών παραστάσεων—Μια διδακτική παρέμβαση. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου-Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή, & Γ. Φεσάκης (Επ.), *Πρακτικά από το 3ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών* (pp. 229–308), Ρόδος, Ελλάδα, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.