



ΠΡΑΚΤΙΚΑ

7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης
Ερευνητών της Διδακτικής των
Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

1, 2 & 3 Δεκεμβρίου 2017

-
- ✓ ΈΝΩΣΗ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (Εν.Ε.Δι.Μ.)
 - ✓ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΕΚΠΑ
 - ✓ ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ-ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ "ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ", ΕΚΠΑ
-

Επιμέλεια:

Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης

**Ε.Ε.Δ.Μ.
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΕΚΠΑ
ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ-ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
“ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ”, ΕΚΠΑ**

**ΠΡΑΚΤΙΚΑ
7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης
Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ
ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ**

Επιμέλεια: Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης

**ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
1-3 Δεκεμβρίου 2017**

Αναφορά ως

Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης (επιμ.). *Πρακτικά 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Μαθηματική Γνώση και Διδακτικές Πρακτικές*. Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ

Ιστοσελίδα: <http://enedim7.gr/>

Copyright © 2017 ΕΝΕΔΙΜ & ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

ISBN: 978-618-82277-1-2

Οργάνωση ύλης: Θεοδόσιος Ζαχαριάδης, Δέσποινα Πόταρη, Γεώργιος Ψυχάρης

Τεχνική Επιμέλεια: Ελένη Κλη

Γραφιστική Επιμέλεια (Εξωφύλλου): Ελένη Κλη

Τεχνική Επιμέλεια Ιστοσελίδας: INSERT-Web Services

Λογότυπο συνεδρίου: Αγγελική Ζούπα

**ΒΕΛΤΙΩΝΟΝΤΑΣ ΤΑ ΣΥΝΑΙΣΘΗΜΑΤΑ ΜΑΘΗΤΩΝ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ:
ΕΝΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΠΕΙΡΑΜΑ**

Ζαχαράκη Κωνσταντίνα & Βαμβακούση Ξένια

Πανεπιστήμιο Αθηνών & Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

kon.zacharaki@gmail.com, xvamvak@cc.uoi.gr

Παρουσιάζουμε ένα διδακτικό πείραμα με στόχο τη βελτίωση των συναισθημάτων δύο μαθητών της Α' Λυκείου κατά την αποδεικτική διαδικασία και, κατ' επέκταση, της στάσης τους απέναντι στη Γεωμετρία. Υιοθετήσαμε υποδείξεις για τη διδασκαλία που απορρέουν από την έρευνα στο χώρο των συναισθημάτων, με κεντρικούς άξονες την ανταπόκριση στις ιδιαίτερες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, τη δημιουργία ενός κλίματος στο οποίο οι μαθητές θα ένιωθαν ασφαλείς να εκφράσουν τα συναισθήματά τους και τη δημιουργία ευκαιριών ώστε τα παιδιά να βιώσουν την επιτυχία κατά την αποδεικτική διαδικασία. Η παρέμβαση είχε θετική επίδραση στα συναισθήματα και τις στάσεις των μαθητών.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

Η μαθηματική απόδειξη είναι ο κατεξοχήν τρόπος αξιολόγησης της αλήθειας των μαθηματικών ισχυρισμών (Moutsios-Rentzos & Spyrou, 2013). Ταυτόχρονα η απόδειξη θεωρείται ως «βασικό συστατικό» καθώς και ως «απαραίτητο εργαλείο για την προώθηση της μαθηματικής κατανόησης» (Ball, Hoyles, Jahnke & Movshovitz-Hadar, 2002, σελ. 907).

Ωστόσο, συχνά η στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά γενικά και, πιο συγκεκριμένα, απέναντι στη γεωμετρική απόδειξη, δεν είναι ευνοϊκή (Moutsios – Rentzos & Kalozoumi – Paizi, 2014). Ως στάση θεωρούμε τη συναισθηματική προδιάθεση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά, εν προκειμένω, στη Γεωμετρία, η οποία συνίσταται από συναισθήματα, προσδοκίες και αξίες (Hannula, 2002; Liljedahl, 2005). Στην εργασία αυτή επικεντρωνόμαστε στα συναισθήματα που έχουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση των στάσεων, ειδικότερα των μη ευνοϊκών. Πράγματι, οι μη ευνοϊκές στάσεις, σε μεγάλο βαθμό, παγιώνονται από επαναλαμβανόμενα αρνητικά συναισθήματα κατά την ενασχόληση με τα μαθηματικά, εν προκειμένω με την απόδειξη, και δύσκολα μεταβάλλονται (Liljedahl, 2005; Zan, Brown, Evans & Hannula,

2006). Φαίνεται, δε, ότι σε βάθος χρόνου, οι στάσεις και η επιτυχία στα μαθηματικά αλληλοτροφοδοτούνται (Hannula, 2015).

Θεωρείται, λοιπόν, σημαντική η διερεύνηση των συναισθημάτων, ως βασικής συνιστώσας των στάσεων των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και, άρα, ως σημαντικός παράγοντας που επηρεάζει την εμπλοκή τους με το μάθημα αυτό και τη σχολική τους επίδοση. Ωστόσο, δεν υπάρχει καθολική συμφωνία ως προς το τι ορίζεται ως διακριτό «συναίσθημα». Στην εργασία αυτή, σε συμφωνία και με άλλους ερευνητές (Hannula, 2015; Moutsios – Rentzos & Kalozoumi – Paizi, 2014) αναφερόμαστε στα επτά βασικά συναισθήματα που εκδηλώνονται στις εκφράσεις του προσώπου και μπορούν να γίνουν αντιληπτά, τα οποία είναι: ο φόβος, η θλίψη, ο θυμός, η περιφρόνηση, η αποστροφή, η χαρά-ευτυχία και η έκπληξη (Ekman & Friesen, 1978). Σημειώνουμε ότι, πέρα από το γεγονός ότι υπάρχουν δοκιμασμένες μεθοδολογίες για την αποκωδικοποίηση των συναισθημάτων αυτών από τις εκφράσεις του προσώπου (Moutsios – Rentzos & Kalozoumi – Paizi, 2014) πολλά άλλα συναισθήματα μπορούν να θεωρηθούν εκφάνσεις των βασικών συναισθημάτων σε ένα ειδικό πλαίσιο, ή σύνθεση δύο ή παραπάνω βασικών συναισθημάτων. Για παράδειγμα, το άγχος μπορεί να θεωρηθεί ως φόβος αποτυχίας (Hannula, 2015).

Σημαντικός παράγοντας στη διαμόρφωση των στάσεων των μαθητών απέναντι στην απόδειξη είναι ο/η εκπαιδευτικός που μπορεί να επηρεάσει τόσο την αξία που αποδίδουν οι μαθητές στην απόδειξη (Moutsios-Rentzos & Spyrou, 2013), όσο και τη «συναισθηματική ατμόσφαιρα» κατά την παραγωγή μιας απόδειξης (Hannula, 2015). Ένα σημείο εκκίνησης για τον/την εκπαιδευτικό είναι η διάγνωση μίας αρνητικής στάσης και των αιτιών της, ώστε να σχεδιαστεί μία παρέμβαση που θα έχει σαν στόχο την τροποποίηση των στοιχείων που προκαλούν αρνητισμό στον μαθητή (Zan & Di Martino, 2007). Όσον αφορά τα χαρακτηριστικά των παρεμβάσεων οι οποίες φαίνεται να έχουν θετικό αντίκτυπο στα συναισθήματα και, άρα, στις στάσεις των μαθητών, έχει επισημανθεί ότι το μαθησιακό περιβάλλον πρέπει να ανταποκρίνεται στις ατομικές ανάγκες του μαθητή και να υποστηρίζει την αυτενέργειά του. Επιπλέον, τα έργα που ανατίθενται στο μαθητή πρέπει να είναι συμβατά με τις ικανότητές του και να του παρέχεται θετική ανατροφοδότηση (Perkun & Stephens, 2010). Επίσης, ο/η εκπαιδευτικός που επιδεικνύει θετικά συναισθήματα για τη διαδικασία (π.χ. ενθουσιασμό), μοντελοποιεί τη ρύθμιση των συναισθημάτων του/της για τους μαθητές και τους υποστηρίζει ώστε να ρυθμίσουν τα δικά τους, ενώ παράλληλα, φαίνεται και να επηρεάζει θετικά τα συναισθήματα των ίδιων (Hannula, 2015). Τέλος, η δημιουργία κλίματος που επιτρέπει την έκφραση των

συναισθημάτων και την αναζήτηση βοήθειας από τους συμμαθητές και τον/την εκπαιδευτικό φαίνεται να έχει θετική επίδραση στα συναισθήματα και, άρα, στις στάσεις των μαθητών (De Corte, Depaere, Op 't Eynde & Verschaffel, 2011; Hannula, 2015).

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε ένα διδακτικό πείραμα (Steffe & Thompson, 2000), με βασική θεωρητική παραδοχή ότι τα συναισθήματα των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κατά την εμπλοκή τους με τη γεωμετρική απόδειξη επηρεάζουν την εξέλιξη και ολοκλήρωση της αποδεικτικής διαδικασίας, καθώς και τη γενικότερη στάση τους απέναντι στη Γεωμετρία. Στόχοι του πειράματος ήταν ο εντοπισμός των παραγόντων που προκαλούν θετικά ή αρνητικά συναισθήματα και η διερεύνηση των συνθηκών υπό τις οποίες η επίδραση των αρνητικών συναισθημάτων μπορεί να εξασθενήσει. Δύο ήταν οι βασικές μας υποθέσεις, συγκεκριμένα ότι: α) σε ένα μεγάλο βαθμό, τα αρνητικά συναισθήματα των μαθητών προκαλούνται από την αίσθηση αδυναμίας να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις της γεωμετρικής απόδειξης και β) μια παρέμβαση με τα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν παραπάνω θα προκαλέσει αλλαγή στα συναισθήματα (και, άρα, στις στάσεις των μαθητών απέναντι στη Γεωμετρία) προς το ευνοϊκότερο.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ.

Οι συμμετέχοντες ήταν δύο μαθητές της Α΄ τάξης ενιαίου λυκείου (16 ετών), ο Κώστας και ο Νίκος (ψευδώνυμα). Επρόκειτο για δύο δίδυμα αγόρια που φοιτούσαν σε λύκειο (δημόσιο) της Ανατολικής Αττικής, τα οποία γνώριζε η πρώτη συγγραφέας. Και οι δύο ήταν επιμελείς μαθητές, με καλή σχολική επίδοση, αλλά αντιμετώπιζαν δυσκολίες με το μάθημα των μαθηματικών. Ειδικότερα, εξέφραζαν απaréσκεια και φόβο για το μάθημα της Γεωμετρίας. Κάθε παιδί συμμετείχε σε δύο ατομικές συνεντεύξεις, πριν και μετά το διδακτικό πείραμα, στις οποίες διερευνήθηκαν οι αντιλήψεις και οι στάσεις του σχετικά με τη γεωμετρική απόδειξη.

Οι παρεμβάσεις (συνολικά 4, διάρκειας 1,5-2 ωρών η κάθε μία) σχεδιάστηκαν με στόχο να αντιμετωπιστούν συγκεκριμένες δυσκολίες που αντιμετώπιζαν τα παιδιά (βλ. και Perkun & Stephens, 2010). Για το σκοπό αυτό πριν ξεκινήσουν οι παρεμβάσεις, η ερευνήτρια που τις πραγματοποίησε (πρώτη συγγραφέας) ζήτησε από τους μαθητές να αναζητήσουν και προσκομίσουν 5 αποδείξεις τις οποίες θα μπορούσαν να χαρακτηρίσουν ως εξής: 1. Ήταν εύκολη – Δεν είχα κάποιο πρόβλημα. 2. Δυσκολεύτηκα – Δεν τα κατάφερα. 3. Δυσκολεύτηκα – Δεν προσπάθησα καν. 4. Δυσκολεύτηκα – Τα κατάφερα. 5. Ήταν ενδιαφέρουσα. Προτρέχοντας λίγο, αναφέρουμε ότι δύο δυσκολίες γενικού τύπου που

αντιμετώπιζαν τα παιδιά ήταν α) οι άγνωστοι όροι στην εκφώνηση του προβλήματος και β) η κατασκευή σύνθετου σχήματος. Επιπλέον και τα δύο παιδιά θεωρούσαν εξ ορισμού δύσκολα τα προβλήματα της κατηγορίας «Σύνθετα Θέματα» του σχολικού βιβλίου και απέφευγαν συστηματικά να εμπλακούν με την επίλυσή τους. Στη διάρκεια της κάθε παρέμβασης, τα παιδιά έλυναν συνεργατικά 2-4 ασκήσεις επιλεγμένες από το σχολικό βιβλίο, ή ειδικά σχεδιασμένες, ώστε να ανακύπτουν οι συγκεκριμένες δυσκολίες.

Η ερευνήτρια υιοθέτησε και ακολούθησε τις υποδείξεις για τη διδασκαλία που αναφέρθηκαν στην εισαγωγή (De Corte et al., 2011; Hannula, 2015; Perkun & Stephens, 2010; βλ. και Harel & Sowder, 2007) και λειτούργησε υποστηρικτικά, τόσο σε γνωστικό, όσο και σε συναισθηματικό επίπεδο. Συγκεκριμένα, η ερευνήτρια έστρεφε την προσοχή των μαθητών στις συγκεκριμένες δυσκολίες και υποδείκνυε στρατηγικές με τις οποίες θα μπορούσαν οι μαθητές να τις αντιμετωπίσουν αυτόνομα (π.χ. «Ποιος είναι ο όρος που δεν ξέρεις; Μπορείς να τον ερμηνεύσεις από τα συμφραζόμενα;»). Βοηθούσε τους μαθητές να ρυθμίσουν τη συναισθηματική τους κατάσταση (π.χ. «Αυτή είναι πράγματι μια δύσκολη άσκηση, μην απογοητεύεσαι, μπορείς να τα καταφέρεις», «Θα σας πω απλά ότι μπορείτε. Από εκεί και πέρα, μη σας τρομάζει καθόλου το σχήμα, ξεκινήστε βήμα-βήμα», «Μην αγχώνεστε! Σκεφτείτε ήρεμα, σε ποιο σχήμα έχω μόνο δύο παράλληλες πλευρές;», «Ας σταματήσουμε 5 λεπτά, να χαλαρώσουμε λίγο και μετά ξαναπιάνουμε την άσκηση»). Προέτρεπε τα παιδιά να αναζητήσουν ο ένας τη βοήθεια του άλλου («Για να δούμε, μήπως έχει ο Νίκος κάποια ιδέα;»). Έδινε θετική ανατροφοδότηση (π.χ., «Το σχήμα σας είναι σχεδόν τέλει! Προσέξτε όμως, εδώ οι ημιευθείες μοιάζουν να είναι κάθετες στο ευθύγραμμο τμήμα. Μήπως αυτό σας μπερδέψει αργότερα;»). Φρόντιζε στο κλείσιμο της κάθε συνάντησης τα παιδιά να ασχοληθούν με προβλήματα που ήταν στο πλαίσιο των τρεχόντων δυνατοτήτων τους. Και, τέλος, δημιούργησε ένα κλίμα στο οποίο τα παιδιά ένιωθαν ασφαλή να εκφράζουν τα συναισθήματά τους και να συζητήσουν γι' αυτά.

Οι παρεμβάσεις πραγματοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους 2014-2015, στην οικία των μαθητών. Μετά από άδεια από τους συμμετέχοντες και τους γονείς τους, οι συνεντεύξεις πριν και μετά τις παρεμβάσεις ηχογραφήθηκαν, ενώ οι παρεμβάσεις βιντεοσκοπήθηκαν. Χρησιμοποιήθηκε μία κάμερα, η οποία εστίαζε στα πρόσωπα των δύο μαθητών καθώς και στα χέρια τους, προκειμένου να καταγραφούν και να αναλυθούν τα συναισθήματά τους. Οι συνεντεύξεις απομαγνητοφωνήθηκαν και οι παρεμβάσεις απομαγνητοσκοπήθηκαν.

Για την καταγραφή των συναισθημάτων των μαθητών κατά την αποδεικτική διαδικασία, αξιοποιήθηκαν κατά κύριο λόγο οι εκφράσεις του προσώπου των μαθητών και επικουρικά οι χειρονομίες και οι λεκτικές εκφράσεις τους (Moutsios – Rentzos & Kalozoumi – Paizi, 2014). Για την απεικόνιση των συναισθημάτων, κατασκευάστηκαν διαγράμματα, στον οριζόντιο άξονα των οποίων αναπαρίσταται ο χρόνος (διάρκεια της κάθε παρέμβασης), ενώ στον κατακόρυφο η ένταση του παρατηρούμενου συναισθήματος (για μια παρόμοια προσέγγιση, βλ. Or 't Eynde & Hannula, 2006). Πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι η απεικόνιση αυτή δεν αντιστοιχεί σε ακριβή κλίμακα μέτρησης και έχει έντονο υποκειμενικό-ερμηνευτικό χαρακτήρα.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.

Στην πρώτη συνέντευξη, οι μαθητές ανέφεραν ότι διατηρούσαν αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά και στους εκπαιδευτικούς του κλάδου, ενώ είχαν και ιδιαίτερα χαμηλή αυτοπεποίθηση όσον αφορά τις μαθηματικές τους ικανότητες. Και για τους δύο μαθητές, τα αρνητικά συναισθήματα που έχουν, κατά δήλωσή τους, επί σειρά ετών βιώσει στα σχολικά μαθηματικά, επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο εμπλέκονται στην επίλυση γεωμετρικού προβλήματος:

Κώστας: Αν δω Σύνθετα Θέματα (κατηγορία ασκήσεων αυξημένης δυσκολίας σχολικού βιβλίου) ή κάποιο δύσκολο σχήμα, αυθυποβάλλομαι και δεν την προσπαθώ. Απογοητεύομαι αλλά το αποδέχομαι ότι οι δυνάμεις μου και οι γνώσεις μου μπορεί να μη φτάνουν σε ένα επίπεδο τόσο καλό.

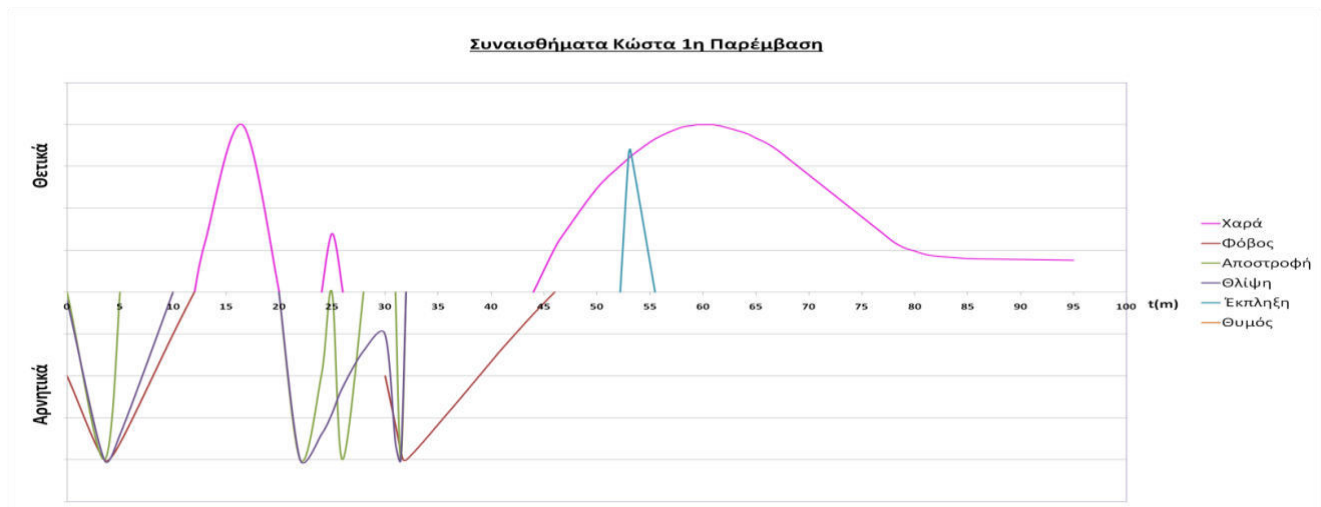
Νίκος: Παρατήρησα το σχήμα και είπα αποκλείεται να τη λύσω. Ήταν η ψυχολογία μου λίγο χάλια. Από την αρχή έλεγα δε θα τη λύσω και νομίζω αυτό είναι που με έκανε να μην την λύσω τελικά... Απογοητεύομαι πάντα όταν δεν τα καταφέρνω.

Ωστόσο, και στα δύο παιδιά και, ιδιαίτερα, για το Νίκο, είναι εμφανής η σύνδεση και των θετικών συναισθημάτων (που συνήθως συνοδεύουν μια επιτυχία) με τη διάθεση περαιτέρω εμπλοκής με τη γεωμετρία:

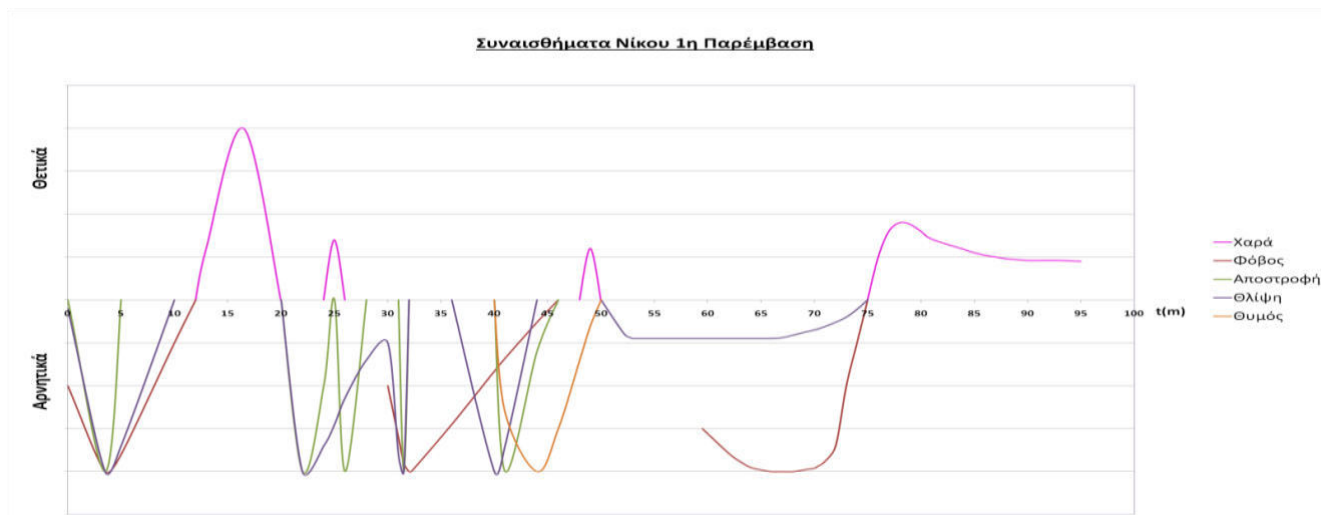
Νίκος: Όταν τελικά την έλυσα χάρηκα πολύ, ένιωσα ικανοποίηση. Κατάφερα κάτι επιτέλους... Πήρα θάρρος να προσπαθήσω κάτι πιο δύσκολο.

Στη διάρκεια της πρώτης παρέμβασης, τα συναισθήματα των μαθητών κατά την αποδεικτική διαδικασία ήταν, κατά κύριο λόγο, αρνητικά, όπως φαίνεται στα Σχήματα 1 και 2. Τονίζουμε το γεγονός ότι και τα δύο αγόρια διακατέχονται από αρνητικά συναισθήματα από την αρχή της διαδικασίας, πριν ακόμα εμπλακούν στην επίλυση των γεωμετρικών

προβλημάτων, ενώ φαίνεται ότι η συνάντηση κλείνει με θετικά συναισθήματα.



Σχήμα 1. Συναισθήματα Κώστα – 1^η παρέμβαση



Σχήμα 2. Συναισθήματα Νίκου – 1^η παρέμβαση

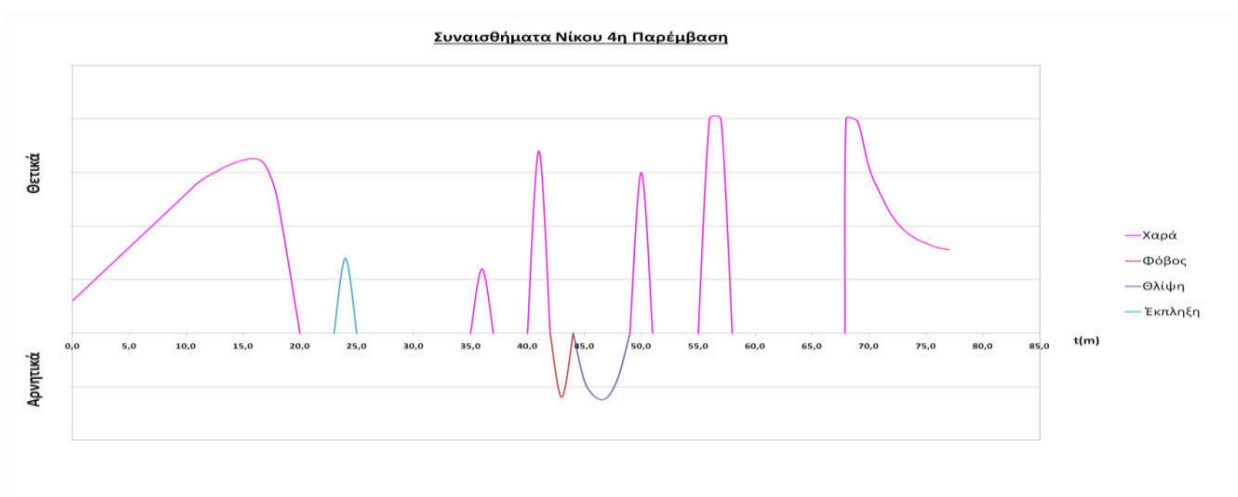
Στη διάρκεια των επόμενων δύο παρεμβάσεων, καθώς αποκτούν στρατηγικές αντιμετώπισης των δυσκολιών που τους εμπόδιζαν να ξεκινήσουν την αποδεικτική διαδικασία (δηλ., κατανόηση της εκφώνησης και κατασκευή του σχήματος), οι μαθητές δοκιμάζουν να αποδείξουν επιτυχώς και τα θετικά συναισθήματα αυξάνονται. Αισθάνονται ασφαλείς να εκφράσουν τα συναισθήματά τους, συχνά αστεειευόμενοι γι' αυτά (π.χ., «Είναι πολύ δύσκολο, μου φαίνεται ότι θα κλάψω!», «Θα αυτοκτονήσω!», «Γιατί μας τυραννάς έτσι;»). Το γεγονός αυτό, μαζί με τη συστηματική υποστήριξη της ερευνήτριας, τους αποφορτίζει και τους επιτρέπει να συνεχίσουν την προσπάθεια.

Σταδιακά, τα δυο αγόρια φαίνεται να αποκτούν μεγαλύτερο έλεγχο της διαδικασίας, αξιολογώντας οι ίδιοι τις ιδέες τους, συνεργαζόμενοι μεταξύ

τους. Ενισχύουν ο ένας την αυτοπεποίθηση του άλλου (π.χ., «Πες τι σκέφτεσαι! Και την άλλη φορά νόμιζες ότι ήταν λάθος, αλλά ήταν σωστό»). Συγκρίνοντας με τα συναισθήματα των παιδιών κατά διάρκεια της τελευταίας παρέμβασης (Σχήμα 3 και 4), είναι εμφανής η αλλαγή προς το καλύτερο στα συναισθήματα που βιώνουν.



Σχήμα 3. Συναισθήματα Κώστα – 4^η παρέμβαση



Σχήμα 4. Συναισθήματα Νίκου – 4^η παρέμβαση

Η βελτίωση αυτή τεκμηριώνεται και από τη δεύτερη συνέντευξη.

Νίκος: Πιστεύω ότι στην αρχή ήμουν λίγο αρνητικός... Κατάλαβα ότι τίποτα δεν είναι ακατόρθωτο... Πιστεύω ότι η Γεωμετρία πλέον είναι το αγαπημένο μου μάθημα... Έχουν αλλάξει πολλά... Νιώθω πολύ όμορφα, επιτέλους μπορώ να λύσω Γεωμετρία... Τώρα που τα καταφέρνω νιώθω πολύ καλά με τον εαυτό μου... Με βοήθησαν πολύ όλα όσα κάναμε μαζί. Καταφέραμε επιτέλους να λύσουμε Σύνθετα Θέματα. Με βοήθησες εσύ η ίδια να αλλάξω τη γνώμη μου για τη Γεωμετρία. Μου άρεσε που σε όλο αυτό συνεργάστηκα με τον αδερφό μου.

Κώστας: Νομίζω ότι οι αποδείξεις μας οργανώνουν μία πορεία μέσα στο μυαλό μας, πού να πάμε και τι να δούμε. Μπορώ και οργανώνω τη σκέψη μου... Πλέον νιώθω πιο άνετα ακόμα και με τα Σύνθετα Θέματα. Το έχω παρατηρήσει και στο σχολείο. Παλιά καθόμουν στην καρέκλα μου και απλώς κοίταγα στον πίνακα, τώρα πλέον ξέρω και συμμετέχω πολύ... έχουν αλλάξει πολλά. Όλα είναι πολύ πιο κατανοητά. Τώρα ξέρω ότι οι γνώσεις μου επαρκούν για να λύσω Μαθηματικά... Είναι ωραίο να βλέπεις τον εαυτό σου να μπορεί να αποδεικνύει τόσο δύσκολα προβλήματα, δε θα σου απαντούσα έτσι πριν τρεις μήνες (πριν την έναρξη των παρεμβάσεων).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ.

Σχεδιάσαμε ένα διδακτικό πείραμα με στόχο τη βελτίωση των συναισθημάτων των μαθητών κατά τη διάρκεια της αποδεικτικής διαδικασίας και, κατ' επέκταση, της στάσης τους απέναντι στη Γεωμετρία (Hannula, 2002, 2015). Υιοθετήσαμε υποδείξεις για τη διδασκαλία που απορρέουν από την έρευνα στο χώρο των συναισθημάτων (De Corte et al., 2011; Hannula, 2015; Perkun & Stephens, 2010; βλ. και Harel & Sowder, 2007). Κεντρικό μας μέλημα ήταν η ανταπόκριση στις ιδιαίτερες δυσκολίες που αντιμετώπιζαν οι μαθητές, η δημιουργία ενός κλίματος στο οποίο οι μαθητές θα ένιωθαν ασφαλείς να εκφράσουν και να επεξεργαστούν τα συναισθήματά τους, και η δημιουργία ευκαιριών στα παιδιά να βιώσουν την αίσθηση του ελέγχου και την επιτυχία κατά την αποδεικτική διαδικασία.

Η συστηματική ενασχόληση με γεωμετρικά προβλήματα που παρουσίαζαν τις συγκεκριμένες δυσκολίες που αντιμετώπιζαν οι μαθητές, με υποστήριξη σε γνωστικό και συναισθηματικό επίπεδο, φάνηκε επωφελής για τους μαθητές. Αναπτύσσοντας στρατηγικές αντιμετώπισης των δυσκολιών αυτών, οι μαθητές ξεπέρασαν την αίσθηση αδυναμίας, η οποία συνοδευόταν από συναισθήματα φόβου και αποστροφής, και τους εμπόδιζε να εμπλακούν στην αποδεικτική διαδικασία. Οι επιτυχίες που βίωσαν, τροφοδότησαν, με τη σειρά τους, θετικά συναισθήματα για την αποδεικτική διαδικασία. Επιπλέον, σε συμφωνία με την ανάλυση του Hannula (2006, 2015), τα θετικά συναισθήματα πυροδότησαν μια αλλαγή στάσης απέναντι στη Γεωμετρία προς το ευνοϊκότερο. Αξίζει να σημειωθεί ότι και οι δύο μαθητές είχαν πολύ καλή επίδοση στις προαγωγικές εξετάσεις της Α' Λυκείου, όπου έγραψαν 17 και 18.

Καταλήγοντας, θα θέλαμε να παρατηρήσουμε ότι η έρευνα που παρουσιάσαμε στην εργασία αυτή αφενός αναδεικνύει τη σημασία των συναισθημάτων στον τρόπο με τον οποίο εμπλέκονται οι μαθητές με τα

μαθηματικά, εν προκειμένω με τη γεωμετρική απόδειξη. Αφετέρου, αναδεικνύει το γεγονός ότι η αλλαγή της στάσης των μαθητών προς το ευνοϊκότερο, παρά το γεγονός ότι είναι δύσκολη (Liljedahl, 2005; Zan, Brown, Evans & Hannula, 2006) είναι εφικτή. Πρέπει να σημειωθεί, ωστόσο, ότι τα αποτελέσματα αυτά προέρχονται από ένα πολύ ειδικό δείγμα: δύο μόνο μαθητές και με ιδιαίτερη σχέση μεταξύ τους (δίδυμα αδέρφια). Απαιτείται περαιτέρω έρευνα για να τεκμηριωθεί κατά πόσο και υπό ποιες συνθήκες μπορούν οι αρχές για τη διδασκαλία που υιοθετήθηκαν στην παρούσα έρευνα, να είναι εφαρμόσιμες και παραγωγικές στο πλαίσιο της τάξης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N. & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The Teaching of Proof. *ICM*, 3 (1–3), 907-920.
- De Corte, E., Depaepe, F., Op ‘t Eynde, P. & Verschaffel. L. (2011). Students’ self-regulation of emotions in mathematics: an analysis of meta-emotional knowledge and skills. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 43(4), 483-496.
- Ekman, P., & Friesen, W. V. (1978). *Facial action coding system: a technique for the measurement of facial movement*. Palo Alto, Calif.: Consulting Psychologists Press.
- Hannula, M.S. (2002). Attitude Towards Mathematics: Emotions, Expectations And Values. *Educational Studies In Mathematics*, 49, 25-46.
- Hannula, M. S. (2006). Motivation In Mathematics: Goals Reflected In Emotions. *Educational Studies in Mathematics* 63, 165–178.
- Hannula, M. S. (2015). Emotions In Problem Solving. In S.J. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 269-288). Cham, Germany: Springer.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Towards comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F.K.Lester (Ed.), *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805-842). USA: NCTM.
- Liljedahl, P. G. (2005). Mathematical discovery and affect: the effect of AHA! Experiences on undergraduate mathematics students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2-3), 219-234.
- Moutsios-Rentzos, A., & Spyrou, P. (2013). The Need For Proof In Geometry: A Theoretical Investigation Through Husserl’s

- Phenomenology. In Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International* (vol. 3, pp. 329-336). Kiel, Germany: PME
- Moutsios-Rentzos, A., & Kalozoumi-Paizi, F. (2014). Odysseus' proving journeys to proof: an investigation on cognitive and affective realities. *Proceedings of CIEAEM 66. Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, 24(1), 290-296.
- Op 't Eynde, P., & Hannula, M. S. (2006). The Case Study of Frank. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 123–129. Springer.
- Pekrun, R. & Stephens, E. J. (2010). Achievement emotions: A control value approach. *Social and Personality Psychology Compass*, 4(4), 238-255.
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. S. (2006). Affect In Mathematics Education: An Introduction. *Educational Studies in Mathematics* 63: 113–121
- Zan, R., & Di Martino, P. (2007). Attitude Toward Mathematics: Overcoming The Positive/Negative Dichotomy. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3(1), 157-168.