



4^Ο ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΤΗΣ ΕΝΩΣΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**«Η τάξη ως πεδίο ανάπτυξης της
μαθηματικής δραστηριότητας»**

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

1-4 Δεκεμβρίου 2011

Συνεδριακό Κέντρο «Κάρολος Παπούλιας»

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Πέμπτη 1 Δεκεμβρίου

17:00-18:00 Έναρξη – Χαιρετισμοί

18:00-19:30 Κεντρική Ομιλία 1 | **Αμφιθέατρο**

Προεδρείο: Κ. Πηλακίση, Χ. Σακονίδης

Cultural-historical activity theory and mathematical knowing
Wolff-Michael Roth

19:30-20:00 Μουσικό Διάλειμμα

20:00-21:00 Δεξίωση

Παρασκευή 2 Δεκεμβρίου

9:00-10:30 Κεντρική Ομιλία 2 | **Αμφιθέατρο**

Προεδρείο: Μαρία Καθδρυμίδου, Μαριάννα Τζεκάκη

Scheme-oriented mathematics education:
Spider web mathematical environment
Milan Hejný

10:30-11:00 Διάλειμμα - Καφές

11:00-12:30 **ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΣΥΝΕΔΡΙΕΣ**

11:00-12:30 Ερευνητικές Εργασίες 1 | **Αμφιθέατρο**

Προεδρείο: Άννα Κλώθου, Χαράλαμπος Λεμονίδης

Παράγοντες που συνθέτουν την κατανόηση μιας έννοιας
των μαθηματικών του Δημοτικού σχολείου:
τα κλάσματα ως έννοια αναφοράς
Αριστοκλής Νικολάου & Δήμητρα Πίττα-Πανταζή

Εννοιολογική και διαδικαστική γνώση για τους ρητούς
και η σχέση τους με τις προσεγγίσεις των μαθητών
στη μελέτη των μαθηματικών
Μαρία Μπεμπένη & Ξένια Βαμβακούση

Αντιλήψεις καθηγητών μαθηματικών για τις περιοδικές
δεκαδικές αναπαραστάσεις ρητών αριθμών
Σωτήρης Ζωιτσάκος, Θεοδόσιος Ζαχαριάδης

ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΡΗΤΟΥΣ ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΙΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μαρία Μπεμπένη και Ξένια Βαμβακούση

Πανεπιστήμιο Αθηνών

mbempeni@math.uoa.gr, xenva@phs.uoa.gr

Παρουσιάζουμε μια μελέτη περίπτωσης δύο μαθητριών Γ' Γυμνασίου που συμμετείχαν σε δύο εις βάθος συνεντεύξεις. Στην πρώτη εξετάστηκαν η εννοιολογική και η διαδικαστική συνιστώσα της αίσθησής τους για τους ρητούς. Στη δεύτερη διερευνήθηκε η προσέγγιση που υιοθετούν στη μελέτη των μαθηματικών. Οι δύο μαθήτριες ανήκουν σε δύο ακραία διαφορετικά προφίλ (εννοιολογικό/ διαδικαστικό) όσον αφορά την αίσθηση του αριθμού, ενώ υιοθετούν και διαφορετικές προσεγγίσεις στη μελέτη (βαθιά/επιφανειακή, αντίστοιχα). Η έρευνα τοποθετείται στο πλαίσιο της συζήτησης για τη διάκριση μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης, καθώς για τα μοντέλα επίδρασης των πεποιθήσεων στη μάθηση των μαθηματικών.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΚΑΙ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

Η διάκριση μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης, με ρίζες στο χώρο της Γνωστικής Ψυχολογίας, έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως και στο χώρο της μάθησης των Μαθηματικών. Ως διαδικαστική γνώση μπορεί να οριστεί η ικανότητα εκτέλεσης μιας καθορισμένης σειράς βημάτων που οδηγούν στην επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων. Από την άλλη μεριά, η εννοιολογική γνώση σχετίζεται με την άδηλη ή μη κατανόηση των αρχών που διέπουν ένα γνωστικό πεδίο, καθώς την ικανότητα δημιουργίας διασυνδέσεων μεταξύ σχετικών «μονάδων» γνώσης (Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001), όπως η ικανότητα μετάφρασης ανάμεσα σε διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας έννοιας (Hierbert & Lefevre, 1986). Στην παρούσα έρευνα ξεκινήσαμε από τη διάκριση μεταξύ διαδικαστικής και εννοιολογικής γνώσης για να μελετήσουμε τις διαδικαστικές και εννοιολογικές συνιστώσες της αίσθησης του (ρητού) αριθμού.

Μια συστηματική απόπειρα ανάλυσης της αίσθησης του αριθμού, βασιζόμενοι στα εννοιολογικά της χαρακτηριστικά έκαναν οι McIntosh, Reys, και Reys (1992), οι οποίοι διέκριναν τρία πεδία που τη συνιστούν. Το πρώτο πεδίο περιλαμβάνει τη γνώση και την ευχέρεια σχετικά με τους αριθμούς. Παραδείγματα συνιστωσών του πρώτου πεδίου είναι η αίσθηση της διάταξης των αριθμών, οι διασύνδεση μεταξύ πολλαπλών αναπαραστάσεων για τους αριθμούς, η αίσθηση της σχετικού και του απόλυτου μεγέθους των αριθμών και η χρήση «βολικών» αριθμών ως σημείων αναφοράς για την εκτίμηση του μεγέθους άλλων αριθμών. Το δεύτερο πεδίο αντιστοιχεί στη γνώση και την ευχέρεια σχετικά με τις πράξεις. Περιλαμβάνει την

κατανόηση της επίδρασης των πράξεων στους αριθμούς, των ιδιοτήτων των πράξεων και της σχέσης μεταξύ των πράξεων. Τέλος το τρίτο πεδίο αφορά το πώς η γνώση και η ευχέρεια με τους αριθμούς και τις πράξεις εφαρμόζεται στην επίλυση προβλημάτων. Περιλαμβάνει την κρίση για το αν απαιτείται ένας ακριβής ή προσεγγιστικός υπολογισμός, τη γνώση ότι υπάρχουν πολλές στρατηγικές για την επίλυση ενός προβλήματος, τη χρήση της κατάλληλης αναπαράστασης ή μεθόδου και τον έλεγχο της λογικότητας των δεδομένων και των αποτελεσμάτων. Η ανάλυση των McIntosh et al. έχει δεχθεί κριτικές (Verschaffel & De Corte, 1996), ωστόσο παραμένει ένα βασικό σημείο αναφοράς όσον αφορά το χώρο έρευνας για την αίσθηση του αριθμού.

Παρόμοια με τους McIntosh et al. (1992), οι περισσότεροι ερευνητές ορίζουν την αίσθηση του αριθμού βάσει εννοιολογικών χαρακτηριστικών, ενώ άλλοι θεωρούν ως συνιστώσες της, όχι μόνο εννοιολογικά αλλά και διαδικαστικά χαρακτηριστικά, όπως την ευχέρεια με τις πράξεις και τις αλγοριθμικές διαδικασίες (Verschaffel & De Corte, 1996), χωρίς όμως να αναφέρονται ρητά στη διάκριση μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης. Παρόλ' αυτά, η διάκριση των δύο ειδών γνώσης έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές οι οποίοι την ελέγχουν εμπειρικά με μαθηματικές έννοιες, ιδιαίτερα την έννοια του αριθμού (π.χ., Schneider & Stern, 2010).

Στο πλαίσιο αυτό αποκτά σημασία για τη μελέτη της αίσθησης του αριθμού η συζήτηση για τη σχέση ανάμεσα στα δύο είδη γνώσης, καθώς και για το κατά πόσο κάποιο από τα δυο προηγείται. Στις απαρχές της συζήτησης, διατυπώθηκαν δύο εκ διαμέτρου αντίθετες απόψεις: Από τη μια, η άποψη ότι οι έννοιες προηγούνται, που υποστηρίζει ότι τα παιδιά αναπτύσσουν (ή γεννιούνται με) τις εννοιολογικές αρχές ενός γνωστικού πεδίου, και στη βάση αυτών των αρχών μαθαίνουν τις διαδικασίες (π.χ. Byrnes, 1992). Στον αντίποδα διατυπώνεται η άποψη ότι η διαδικαστική γνώση προηγείται, σύμφωνα με την οποία τα παιδιά οικειοποιούνται τις διαδικασίες και στη συνέχεια εξάγουν τις έννοιες από την εμπειρία τους (π.χ. Fuson, 1988). Υποστηρικτικά εμπειρικά δεδομένα υπάρχουν και για τις δυο αντικρουόμενες απόψεις. Το γεγονός αυτό οδήγησε τη Rittle-Johnson και τους συνεργάτες της (π.χ. Rittle-Johnson et al., 2001) να αντιπροτείνουν ότι η εννοιολογική και η διαδικαστική γνώση αναπτύσσονται παράλληλα και σε στενή σχέση μεταξύ τους. Υποστηρίζουν ότι υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ των δύο ειδών γνώσης και έλεγξαν πειραματικά ότι η βελτίωση του ενός μπορεί να οδηγήσει σε βελτίωση και του άλλου.

Πρόσφατα, οι Hallett, Nunes και Bryant (2010) ισχυρίστηκαν ότι η μέχρι τώρα έρευνα δε λαμβάνει υπόψη τις ατομικές διαφορές των παιδιών στον τρόπο που συνδυάζουν την εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση. Ερευνώντας την κατανόηση των κλασμάτων, υπέθεσαν ότι υπάρχουν παιδιά στα οποία υπερτερεί η εννοιολογική γνώση, παιδιά στα οποία υπερτερεί η διαδικαστική γνώση και παιδιά στα οποία η εννοιολογική και η διαδικαστική γνώση βρίσκονται σε παρόμοια επίπεδα ανάπτυξης. Αναλύοντας τις επιδόσεις 318 παιδιών της Δ' και Ε' δημοτικού σε εννοιολογικά και διαδικαστικά έργα, βρήκαν πράγματι τις προβλεπόμενες ατομικές διαφορές. Οι ερευνητές δεν εξηγούν διεξοδικά πώς προκύπτουν αυτές οι

διαφορές, ωστόσο εικάζουν ότι δεν είναι αναπτυξιακές, αλλά ότι οφείλονται στην ευχέρεια και το ενδιαφέρον που κάθε παιδί διαθέτει για την εκμάθηση εννοιών και διαδικασιών.

Μια άλλους είδους κριτική στην έρευνα για την εννοιολογική και διαδικαστική γνώση που αφορά την παρούσα μελέτη είναι μεθοδολογικής φύσης. Οι Schneider και Stern (2010), θέτουν, ανάμεσα σε άλλα, το εξής ερώτημα: Σε ποιο βαθμό είναι δυνατόν να επινοηθούν έργα που μετρούν αποκλειστικά εννοιολογική ή διαδικαστική γνώση; Για παράδειγμα, η σύγκριση ετερονύμων κλασμάτων είναι ένα έργο που μπορεί να αποκαλύψει φτωχή εννοιολογική κατανόηση για τα κλάσματα (όταν π.χ. ένα παιδί βασίζει τη σύγκριση σε μόνο έναν από τους δύο όρους των κλασμάτων). Η επιτυχία στο έργο, όμως, μπορεί να εξασφαλιστεί και με την εφαρμογή ενός αλγορίθμου, χωρίς αυτό να συνεπάγεται απαραίτητα εννοιολογική κατανόηση. Από την άλλη μεριά, σε πολλές περιπτώσεις, η αναγνώριση ότι μια αλγοριθμική διαδικασία είναι κατάλληλη και απαραίτητη προαπαιτεί εννοιολογική κατανόηση.

Στην παρούσα εργασία μελετήσαμε σε πρώτη φάση την αίσθηση του (ρητού) αριθμού σε παιδιά Γ΄ Γυμνασίου. Υιοθετήσαμε τη διάκριση μεταξύ εννοιολογικών και διαδικαστικών συνιστωσών της αίσθησης του αριθμού. Ωστόσο, λαμβάνοντας υπόψη την κριτική των Schneider και Stern (2010), σχεδιάσαμε μια ποιοτική μελέτη, κατά την οποία είναι δυνατόν να παρατηρηθούν οι στρατηγικές (εννοιολογικές/διαδικαστικές) που ακολουθεί το κάθε παιδί, ανεξάρτητα από το αν τα έργα εμπίπτουν σε εννοιολογικές ή διαδικαστικές συνιστώσες. Για παράδειγμα, αν το παιδί συγκρίνει δύο ετερόνυμα κλάσματα μέσω της μετατροπής τους σε ομώνυμα ή δεκαδικούς, τότε ακολουθεί διαδικαστική στρατηγική. Αντίθετα, αν εκτιμήσει το μέγεθος των δύο κλασμάτων μέσω της σύγκρισής τους με αριθμούς σημεία-αναφοράς, ή εκτιμώντας πόσο απέχει καθένα από τη μονάδα, τότε ακολουθεί εννοιολογική στρατηγική.

Παρόμοια με τους Hallet et al. (2010), υποθέσαμε ότι θα βρούμε ατομικές διαφορές στον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά προσεγγίζουν τα έργα για τους ρητούς. Για τις ανάγκες τις συγκεκριμένης εργασίας, θα αναφερθούμε στις προβλέψεις για δύο διαφορετικά, «ακραία» προφίλ: Προβλέψαμε ότι θα βρεθούν μαθητές οι οποίοι θα ακολουθούν συστηματικά διαδικαστική προσέγγιση και θα αποτυγχάνουν στα έργα με εννοιολογική στόχευση (διαδικαστικό προφίλ). Επιπλέον, προβλέψαμε ότι θα βρεθούν μαθητές οι οποίοι θα έχουν φτωχές διαδικαστικές γνώσεις, αλλά θα χρησιμοποιούν με επιτυχία εννοιολογικές στρατηγικές (εννοιολογικό προφίλ).

Ταυτόχρονα, επεκτείνοντας τον προβληματισμό των Hallet et al. (2010), στην παρούσα μελέτη αποπειραθήκαμε να διερευνήσουμε τις αιτίες που προκαλούν τις ατομικές διαφορές που αναμένουμε.

Ένας παράγοντας που ενδεχομένως συμβάλλει στη δημιουργία τέτοιων διαφορών είναι οι πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με τα μαθηματικά (mathematics-related beliefs), μια συνιστώσα των οποίων είναι οι πεποιθήσεις σχετικά με το αντικείμενο (πεποιθήσεις για τα μαθηματικά, τη μάθηση και τη διδασκαλία τους. (Op 't Eynde,

De Corte & Verchafell, 2002). Για παράδειγμα, μια ευρέως διαδεδομένη πεποίθηση - τόσο σε μαθητές, όσο και σε διδάσκοντες- είναι ότι τα μαθηματικά είναι ένα σύνολο κανόνων και διαδικασιών, η οποία συνδέεται με την πεποίθηση ότι η απομνημόνευση είναι σημαντική στη μάθηση των μαθηματικών (π.χ., Kloosterman, 2002). Τέτοιου είδους πεποιθήσεις ενδεχομένως θα μπορούσαν να σχετίζονται με διαδικαστικές προσεγγίσεις γενικά, και στους ρητούς αριθμούς ειδικότερα. Ωστόσο, παρά το γεγονός ότι είναι ευρέως αποδεκτό ότι οι σχετικές με τα μαθηματικά πεποιθήσεις επηρεάζουν τη μάθηση των μαθηματικών, ένα καίριο ερώτημα είναι με ποιο τρόπο γίνεται αυτό. Υιοθετήσαμε το μοντέλο της Σταθοπούλου (2006), το οποίο προβλέπει την έμμεση επίδραση των πεποιθήσεων, διαμέσου της προσέγγισης του μαθητή στη μελέτη των μαθηματικών. Στο μοντέλο αυτό γίνεται διάκριση ανάμεσα στη βαθιά και την επιφανειακή προσέγγιση στη μάθηση και τη μελέτη: Στην πρώτη, το υποκείμενο έχει ως στόχο την προσωπική κατασκευή νοήματος, υιοθετεί στρατηγικές μάθησης που υποστηρίζουν τη σύνδεση ιδεών και έχει (μεταγνωστική) επίγνωση για την κατανόησή του. Στη δεύτερη, το υποκείμενο έχει ως στόχο την υψηλή (σχολική) επίδοση ή ακόμα και την απλή διεκπεραίωση των σχολικών καθηκόντων, υιοθετεί την απομνημόνευση ως στρατηγική μάθησης, ενώ δεν έχει (μεταγνωστική) για την κατανόησή του

Παρόμοια με τη Σταθοπούλου (2006), υποθέσαμε ότι οι μαθητές με διαδικαστικό προφίλ όσον αφορά την αίσθηση του αριθμού θα έχουν πιο «απλοϊκές» σχετικά με τα μαθηματικά πεποιθήσεις και συνακόλουθα θα ακολουθούν πιο επιφανειακή προσέγγιση στη μελέτη των μαθηματικών, και συγκεκριμένα των ρητών, από τους μαθητές με εννοιολογικό προφίλ.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες ήταν 7 μαθητές Γ' Γυμνασίου από σχολεία της Αττικής, με ικανοποιητική επίδοση στο μάθημα των μαθηματικών του σχολείου.

Υλικά

Σχεδιάσαμε ένα δοκίμιο με 19 έργα σχετικά με εννοιολογικές και διαδικαστικές συνιστώσες για το ρητό αριθμό. Ακολουθεί μια αδρή κατηγοριοποίηση των έργων, βασισμένη σε σχετική βιβλιογραφία (π.χ. McIntosh et al., 1992; Moss & Case, 1999).

Τα έργα που θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν με χρήση διαδικασιών που διδάσκονται στο σχολείο περιλάμβαναν πράξεις κλασμάτων, μετατροπή σε ισοδύναμα κλάσματα, σύγκριση και διάταξη κλασμάτων.

Τα έργα που εξέταζαν βασική εννοιολογική κατανόηση περιλάμβαναν αναπαράσταση γνησίων και καταχρηστικών κλασμάτων σε επιφάνεια (αναγνώριση και κατασκευή), αναγνώριση του κλάσματος ως λόγου (π.χ. *Αν κάποιος έφαγε το 1/4 μιας πίτσας, μπορείς να ξέρεις πόσα κομμάτια έφαγε; Ή, πόσα κομμάτια είχε όλη η πίτσα;*), νοερή σύγκριση καταχρηστικού και γνήσιου κλάσματος και επιλογή κατάλληλης πράξης ώστε να αληθεύει μια ανισοτική σχέση (π.χ. $10 \square 1/2 > 10$).

Τέλος, συμπεριλήφθησαν έργα που στη βιβλιογραφία θεωρούνται πιο σύνθετα, είτε γιατί απαιτούν πιο προχωρημένη εννοιολογική κατανόηση, είτε γιατί απαιτούν συνδυασμό εννοιολογικής κατανόησης και διαδικαστικής ευχέρειας (π.χ. αναπαράσταση κλασμάτων στην αριθμογραμμή, εκτίμηση αποτελέσματος πράξεων, έργα για την πυκνή διάταξη των ρητών, έργα για το ρόλο της μονάδας και για το κλάσμα ως λόγο σε πραγματικό πρόβλημα).

Για τη διερεύνηση των πεποιθήσεων σχετικά με τα μαθηματικά, καθώς και τον είδος της προσέγγισης στη μελέτη (επιφανειακή/βαθιά) διατυπώθηκαν 13 ερωτήσεις ανοιχτού τύπου για να χρησιμοποιηθούν στο πλαίσιο συνέντευξης. Μια ομάδα ερωτήσεων αφορούσε τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζουν τη μελέτη των μαθηματικών γενικά, ενώ μια δευτέρα επικέντρωνε στα κλάσματα. Οι περισσότερες ερωτήσεις ήταν διατυπωμένες με τη μορφή σεναρίου που περιέγραφε μια κατάσταση προς σχολιασμό ή αντιμετώπιση. Για πρακτικούς λόγους, παραδείγματα θα αναφερθούν στο τμήμα Αποτελέσματα, μαζί με τις απαντήσεις που δόθηκαν.

Διαδικασία

Η έρευνα περιελάμβανε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση οι μαθητές συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο σε μία ώρα και στη συνέχεια στα πλαίσια ημιδομημένης συνέντευξης τους ζητήθηκε να εξηγήσουν τον τρόπο που εργάστηκαν. Στη δεύτερη φάση, η οποία πραγματοποιήθηκε 1 εβδομάδα αργότερα, κλήθηκαν να απαντήσουν στις ερωτήσεις για τις πεποιθήσεις τους σχετικά με τα μαθηματικά. Επιπλέον τους ζητήθηκε να σχολιάσουν τις απαντήσεις τους του πρώτου δοκίμιου (βεβαιότητα για τη λύση, επίγνωση της επίδοσής τους στα έργα). Η δεύτερη συνέντευξη διήρκεσε περίπου μία ώρα. Οι συνεντεύξεις απομαγνητοφωνήθηκαν.

Αποτελέσματα

Από την επεξεργασία των απαντήσεων των μαθητών προέκυψαν τα ακόλουθα τέσσερα προφίλ μαθητών, βασισμένα στο σύνολο των απαντήσεων και εξηγήσεων στα έργα του δοκίμιου: α) 3 μαθητές με εννοιολογική και διαδικαστική γνώση που ολοκλήρωσαν επιτυχώς όλα σχεδόν τα έργα, χρησιμοποίησαν εννοιολογικές στρατηγικές όταν αυτό ήταν πρόσφορο και μπορούσαν να εξηγήσουν τον τρόπο που εργάστηκαν στη συνέντευξη, β) 3 μαθητές με επαρκή διαδικαστική γνώση που στερούνταν έστω και στοιχειώδους εννοιολογικής, γ) 1 μαθήτρια με ανεπτυγμένη εννοιολογική που στερούνταν όμως διαδικαστικής. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε πιο αναλυτικά αποτελέσματα για μία μαθήτρια της β' κατηγορίας (M_1) και τη μαθήτρια της γ' κατηγορίας (M_2). Επιλέξαμε τα συγκεκριμένα κορίτσια γιατί έχουν παρόμοια επίδοση στα σχολικά μαθηματικά (κατατάσσονται στις καλύτερες μαθήτριες στην τάξη τους), θεωρούν τα μαθηματικά ως το αγαπημένο τους μάθημα και σχεδιάζουν να ακολουθήσουν σχετική κατεύθυνση.

Η μαθήτρια M_1 ολοκλήρωσε με επιτυχία όλα τα έργα στα οποία αναγνώριζε ότι μπορεί να εφαρμόσει άμεσα γνωστές διαδικασίες (π.χ. πράξεις κλασμάτων). Απέτυχε όμως σε όλα τα έργα που απαιτούσαν έστω και στοιχειώδη εννοιολογική γνώση.

Χαρακτηριστικό είναι ότι, ενώ εκτέλεσε με επιτυχία όλες τις συγκρίσεις και διατάξεις κλασμάτων όταν είχε την ευκαιρία να χρησιμοποιήσει χαρτί και μολύβι, απέτυχε στις περιπτώσεις που της ζητήθηκε να το κάνει νοερά. Για παράδειγμα, εκτιμώντας ποιο από τα δύο κλάσματα $\frac{3}{8}$ και $\frac{7}{13}$ είναι πιο κοντά στο $\frac{1}{2}$, επέλεξε το $\frac{3}{8}$ με την αιτιολόγηση «ο παρονομαστής 8 είναι πιο κοντά στο 2». Επίσης ενδεικτικό είναι ότι απέτυχε και στα πιο απλά έργα αναπαράστασης κλάσματος, ακόμα και με το πιο οικείο μοντέλο, αυτό της «πίτσας».

Η μαθήτρια M_2 απέτυχε σε όλα τα έργα που εξέταζαν τις πράξεις κλασμάτων. Ωστόσο ολοκλήρωσε με επιτυχία σχεδόν όλα τα έργα σύγκρισης και διάταξης, εφαρμόζοντας εννοιολογικές στρατηγικές ακόμα και στην περίπτωση που είχε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσει χαρτί και μολύβι. Για παράδειγμα, συγκρίνοντας τα κλάσματα $\frac{6}{14}$ και $\frac{5}{8}$, αξιοποίησε το $\frac{1}{2}$ ως αριθμό αναφοράς και συμπέρανε σωστά ότι το $\frac{6}{14}$ είναι μικρότερο από το $\frac{5}{8}$, αφού το πρώτο είναι μικρότερο και το δεύτερο μεγαλύτερο από το $\frac{1}{2}$, αντίστοιχα. Χαρακτηριστικό είναι ότι η M_2 έδειξε να αντιλαμβάνεται το κλάσμα ως λόγο. Για παράδειγμα –σε αντίθεση με τη M_1 – απάντησε σωστά ότι από τη δήλωση «κάποιος έφαγε το $\frac{1}{4}$ μιας πίτσας» δεν μπορεί κανείς να συμπεράνει πόσα κομμάτια έφαγε, σχολιάζοντας «Δεν μπορώ να ξέρω, γιατί δε μου λέει πόσα κομμάτια είναι όλη η πίτσα, αλλά αν είχε 4 κομμάτια τότε είχε φάει το 1». Ενδεικτικό επίσης είναι ότι η M_2 αναφέρθηκε αυθόρμητα σε αναπαραστάσεις για τους αριθμούς –και μάλιστα, στην απαιτητική αναπαράσταση των αριθμών σε άξονα– για να αντιμετωπίσει κάποια από τα πιο σύνθετα έργα του δοκιμίου. Για παράδειγμα, στην ερώτηση «πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο $\frac{2}{5}$ και το $\frac{3}{5}$ » απάντησε «Αν τους βάλουμε στον άξονα, σίγουρα θα υπάρχει κάποιο κενό. Στο κενό αυτό περιέχονται άπειροι αριθμοί».

Κατά τη διάρκεια της δεύτερης συνέντευξης, αναδείχθηκαν διαφορές ανάμεσα στα δύο κορίτσια σε σχέση με το πού δίνουν έμφαση και σε τι είδους στρατηγικές αποδίδουν αξία σχετικά με τη μελέτη των μαθηματικών.

Πιο συγκεκριμένα, η M_1 δίνει έμφαση στις ασκήσεις που έχουν λυθεί στο σχολείο ή σε εξωσχολικά μαθήματα για τις οποίες αναφέρει «τα κοιτάζω για να θυμάμαι τι κάνουμε». Ακολουθεί στρατηγικές που θεωρεί ότι θα της εξασφαλίσουν επιτυχία στην εξέταση. Χαρακτηριστική είναι η συμβουλή που θα έδινε σε ένα μικρότερο παιδί «Να διαβάξει ότι είναι σημαντικό ή ότι τους λένε ότι είναι ΣΟΣ». Το τι είναι σημαντικό για τη M_1 διαφαίνεται από την απάντησή της στην εξής ερώτηση: «Παρατηρείς μία φίλη που μελετά μαθηματικά χωρίς να λύνει ασκήσεις... Τη βλέπεις να αφιερώνει πολύ χρόνο διαβάζοντας τη θεωρία, να φτιάχνει διαγράμματα, να γυρνά πίσω σε προηγούμενες ενότητες, να κρατά σημειώσεις. Μοιάζει με τον τρόπο που μελετάς εσύ μαθηματικά; Έχεις κάτι να τη συμβουλεύσεις;» Παρά το γεγονός ότι διστάζει να απαξιώσει τον τρόπο μελέτης της υποθετικής φίλης («Και το να διαβάζεις θεωρία, κι αυτό καλό είναι»), στη συνέχεια παραδέχεται ότι για την ίδια «είναι αρκετό να ξέρουμε αυτά που χρειάζονται να λύνουμε τις ασκήσεις».

Η M_2 δίνει έμφαση στη μελέτη της θεωρίας και στην αυτόνομη επίλυση ασκήσεων, όπως φαίνεται και από τη συμβουλή της σε ένα μικρότερο παιδί: «Να διαβάσει

θεωρία και να λύνει ασκήσεις μόνο του. [...] Να λύνει κι άλλες ασκήσεις εκτός από αυτές που έχει για το σχολείο». Αντίθετα από τη Μ₁, φαίνεται να εκτιμά τον τρόπο μελέτης του υποθετικού κοριτσιού που αναφέρθηκε πιο πάνω («Μια χαρά τα κάνει, μακάρι να διάβαζα κι εγώ πάντα έτσι...»). Κατά τη γνώμη της, στόχος της μελέτης της θεωρίας είναι «να τα καταλάβεις καλά κι όταν σου βάλουν μία άσκηση να μπορείς να τη λύσεις».

Ενδεικτική της συνέπειας ανάμεσα στην προσέγγιση του κάθε κοριτσιού στη μελέτη με τον τρόπο που αντιμετώπισε τα έργα του πρώτου δοκιμίου, είναι και η απάντησή τους στην ερώτηση «Ένα μικρότερο παιδί σου ζητάει βοήθεια γιατί δεν καταλαβαίνει τη σύγκριση κλασμάτων. Τι θα έκανες για να βοηθήσεις;». Η Μ₁ θα έδειχνε άμεσα τη μετατροπή των κλασμάτων σε ομώνυμα. Η Μ₂, αντίθετα, προτείνει:

Να καταλάβαινε την έννοια των κλασμάτων...δεν ξέρω...Ο καθένας έτσι όπως σκέφτεται [...] Θα του έλεγα κάποιους κανόνες πάνω στα κλάσματα, αλλά όταν είναι διαφορετικά τα κλάσματα, αν έχει καταλάβει την έννοια των κλασμάτων πιστεύω πως μπορεί να τα συγκρίνει.

Η συνέπεια αυτή διαφαίνεται και στο επίπεδο των προτιμήσεών τους σχετικά με το είδος των μαθηματικών έργων που προτιμούν. Πιο συγκεκριμένα, τους δόθηκε το εξής σενάριο: «Η καθηγήτριά σου στο σχολείο σου δίνει την ευκαιρία να επιλέξεις ανάμεσα σε δύο εργασίες για τα κλάσματα. Καμία από τις δύο δεν είναι απλή - και οι δύο απαιτούν σκέψη και προσοχή. Η μία μπορεί να λυθεί με βάση τις μεθόδους που έχεις διδαχτεί, αλλά είναι σύνθετη γιατί απαιτεί την εφαρμογή πολλών κανόνων και διαδικασιών (π.χ. πράξεων). Στην άλλη δε χρειάζεται να εφαρμόσεις κανόνες, πράξεις και άλλες διαδικασίες, αλλά θα χρειαστεί να επιστρατεύσεις ό,τι έχεις καταλάβει για τα κλάσματα μέχρι τώρα για να σκεφτείς κάτι καινούργιο. Με ποια από τι δύο θα προτιμούσες να ασχοληθείς; Γιατί;»

Μ₁ : Μάλλον την πρώτη, γιατί θα είχε πράξεις και είναι πράγματα τα οποία ξέρω ήδη, ενώ στη δεύτερη μπορεί να υπήρχε κάτι που δεν ξέρω.

Μ₂: Τη δεύτερη...Η πρώτη δεν...Είναι πιο ωραίο να σκεφτείς κάτι καινούριο, παρά να κάνεις τα ίδια και τα ίδια, στο τέλος έτσι και είναι σωστό αυτό που σκέφτηκες νιώθεις πιο ωραία. Η εφαρμογή κανόνων και διαδικασιών εμένα δε μου λέει κάτι, δεν βρίσκω ενδιαφέρον. Είναι σαν μια παπαγαλία, ένα σύστημα που κάνουμε να λύνουμε ασκήσεις, τίποτα παραπάνω...

Σημειώνουμε επίσης ότι όταν ρωτήθηκε η Μ₁ αν υπάρχει κάτι σχετικά με τα κλάσματα που δεν έχει καταλάβει απάντησε με βεβαιότητα όχι. Επιπλέον, ξανακοιτάζοντας τις απαντήσεις της στο πρώτο δοκίμιο, δεν φάνηκε να προβληματίζεται ή να αμφιβάλλει για κάποια από τις απαντήσεις της. Αντίθετα, η Μ₂ είχε επίγνωση ότι δε θυμόταν σωστά τις πράξεις κλασμάτων και, επιπλέον, εντόπισε σχεδόν όλα τα έργα στα οποία είχε κάνει λάθη, σχολιάζοντας ότι δεν είναι σίγουρη για την ορθότητα της απάντησής της.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματα που παρουσιάσαμε στην εργασία αυτή είναι συμβατά με την υπόθεση ότι υπάρχουν ατομικές διαφορές στον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά συνδυάζουν την εννοιολογική και τη διαδικαστική γνώση (Hallet et al., 2010) και μάλιστα, είναι δυνατόν να υπάρχουν «ακραίες» περιπτώσεις στις οποίες η εννοιολογική γνώση υπερτερεί δραματικά της διαδικαστικής και αντίστροφα. Μελετώντας περαιτέρω τις δύο περιπτώσεις κοριτσιών M_1 , M_2 με το εννοιολογικό και διαδικαστικό προφίλ, αντίστοιχα, όσον αφορά την αίσθηση του ρητού, δείξαμε ότι οι διαφορές στον τρόπο με τον οποίο αντιμετώπισαν το πρώτο δοκίμιο συνοδεύονται από διαφορές και στον τρόπο που προσεγγίζουν τα μαθηματικά και τη μελέτη τους. Η M_1 φαίνεται να έχει ως στόχο την επιτυχία στα σχολικά της καθήκοντα, υιοθετεί την απομνημόνευση ως στρατηγική μάθησης, ενώ δεν έχει μεταγνωστική επίγνωση για την κατανόησή της στους ρητούς. Η M_2 , από την άλλη μεριά, φαίνεται να έχει ως στόχο την προσωπική κατασκευή νοήματος, αποδίδει αξία σε στρατηγικές μάθησης που υποστηρίζουν τη σύνδεση ιδεών και έχει υψηλή μεταγνωστική επίγνωση της κατανόησής της για τους ρητούς. Τα χαρακτηριστικά αυτά διακρίνουν την επιφανειακή από τη βαθιά προσέγγιση στη μελέτη και είναι, σύμφωνα με τη Σταθοπούλου (2006) ενδεικτικά της επίδρασης διαφορετικών πεποιθήσεων για το γνωστικό αντικείμενο, εν προκειμένω τα μαθηματικά. Τα ευρήματά μας μπορούν να αξιοποιηθούν ως βάση για τη διατύπωση υποθέσεων σχετικά με την ύπαρξη σχέσης μεταξύ των πεποιθήσεων, των προσεγγίσεων στη μελέτη των μαθηματικών και τις εννοιολογικές/διαδικαστικές προσεγγίσεις στους ρητούς, για να ελεγχθούν με περαιτέρω έρευνα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Byrnes, J. P. (1992). The conceptual basis of procedural learning. *Cognitive Development*, 7, 235-257.
- Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concept of number*. New York: Springer.
- Hallet, D., Nunes, T., Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology*, 102, 345-406.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert and P. Lefevre (Eds.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kloosterman, P. (2002). Beliefs about mathematics and mathematics learning in the secondary school: Measurement and implications for motivation, In G, C. Leder, E. Pehkonen, & G. Torner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 247-269). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- McIntosh, A., Reys, B.J., & Reys, R.E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12, 2-8.
- Moss, J., Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum, *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 122-147.
- Op 't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L (2002). Framing students' mathematics-related beliefs: A quest for conceptual clarity and a comprehensive categorization. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Torner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp.13-17). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R.S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93, 346-362.
- Schneider, M., Stern, E. (2010). The developmental relations between conceptual and procedural knowledge: A multimethod approach, *Developmental Psychology*, 46, 178-192.
- Verschaffel, L., De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education*,. Part I (pp. 99-138). Dordrecht: Kluwer.
- Σταθοπούλου, Χ. (2006). *Διερεύνηση της σχέσης ανάμεσα στη σχετική με τη φυσική προσωπική επιστημολογία και τη μάθηση της Φυσικής*. Αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή, ΕΚΠΑ.

