



4^Ο ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΤΗΣ ΕΝΩΣΗΣ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**«Η τάξη ως πεδίο ανάπτυξης της
μαθηματικής δραστηριότητας»**

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

1-4 Δεκεμβρίου 2011

Συνεδριακό Κέντρο «Κάρολος Παπούλιας»

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Παρασκευή 2 Δεκεμβρίου

Η εξαντλείμενη κίνηση του ορθογωνίου τριγώνου
σε μια διδασκαλία του πυθαγορείου θεωρήματος
Παναγιώτης Σπύρου & Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος

Η σχεδίαση της συντομότερης διαδρομής μεταξύ δυο
σημείων μιας κυλινδρικής επιφάνειας από μαθητές Γ΄ Γυμνασίου,
με τη χρήση εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας
Ιωάννης Ζάντζος, Χρόνης Κυνηγός

Σάββατο 3 Δεκεμβρίου

9:00-10:30 Κεντρική Ομιλία 3 | **Αμφιθέατρο**

Προεδρείο: Δέσποινα Πόταρη, Γιώργος Φιλίππου

Μαθηματική δραστηριότητα και μαθηματικά έργα
Μαριάννα Τζεκάκη

10:30-11:00 Διάλειμμα - Καφές

11:00-12:30 **ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΣΥΝΕΔΡΙΕΣ**

11:00-12:30 Ερευνητικές Εργασίες 7 | **Αμφιθέατρο**

Προεδρείο: Δέσποινα Δεσλή, Κωνσταντίνος Χρίστου

Ικανότητες στην αλγεβρική σκέψη και τα
εξειδικευμένα δομικά συστήματα
Μαρία Χειμωνή, Δήμητρα Πίττα-Πανταζή

Τι αριθμητικές τιμές (δεν) παίρνουν οι μεταβλητές;
Απαντήσεις Φλομανδών και Ελλήνων μαθητών
Κωνσταντίνος Π. Χρήστου, Ξένια Βαμβακούση, Wim Van Dooren

Το πέρασμα από την αριθμητική στην άλγεβρα:
επίλυση και κατηγοριοποίηση εξισώσεων και ανισώσεων
Κωνσταντίνος Αραμπατζής, Κωνσταντίνος Π. Χρήστου,
Στέλλα Βοσνιάδου

ΤΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ (ΔΕΝ) ΠΑΙΡΝΟΥΝ ΟΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ; ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΦΛΑΜΑΝΔΩΝ ΚΑΙ ΕΛΛΗΝΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

Κωνσταντίνος Π. Χρήστου¹, Ξένια Βαμβακούση², Wim Van Dooren³

¹Πανεπιστήμιο Κρήτης, ²Πανεπιστήμιο Κύπρου), ³Catholic University of Leuven
kochrist@phs.uoa.gr, xenva@phs.uoa.gr, Wim.VanDooren@ped.kuleuven.be

Η μελέτη αυτή εστιάζει στον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύουν οι μαθητές τη χρήση των γραμμάτων στην άλγεβρα και πιο συγκεκριμένα στην τάση τους να θεωρούν ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν φυσικούς ή μόνο συγκεκριμένα είδη μη-φυσικών αριθμών. Στη μελέτη συμμετείχαν Φλαμανδοί μαθητές Γ' Γυμνασίου και εξετάστηκε αν και σε ποιο βαθμό κάνουν τα ίδια λάθη με τους Έλληνες συμμαθητές τους, στους οποίους είχε αρχικά παρατηρηθεί η συγκεκριμένη παρανόηση. Οι Φλαμανδοί μαθητές εμφάνισαν μειωμένη τάση να θεωρούν ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν αποκλειστικά φυσικούς αριθμούς αλλά, παρόλα αυτά, στην πλειοψηφία τους δεν δέχονταν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό ως πιθανή αντικατάσταση. Έτειναν επίσης να θεωρούν ότι το φαινομενικό πρόσημο των παραστάσεων πρέπει να διατηρείται, (π.χ., το $-β$ δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές).

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο αλγεβρικός συμβολισμός και ιδιαίτερα η έννοια της μεταβλητής δημιουργεί μεγάλες δυσκολίες κατανόησης και ευθύνεται για πολλά λάθη που κάνουν οι μαθητές σε διάφορα μαθηματικά πεδία (Asquith, Stephens, Knuth και Alibali, 2007; Kieran, 2006). Όταν οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της μεταβλητής και τον αλγεβρικό συμβολισμό καλούνται να κατανοήσουν ότι οι μεταβλητές στην άλγεβρα χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν οποιονδήποτε αριθμό μέσα από ένα σύνολο. Έρευνες όμως έχουν δείξει ότι οι μαθητές αρχικά εμφανίζουν την τάση να θεωρούν ότι τα γράμματα αναπαριστούν αντικείμενα (π.χ., μ : τα μήλα), ή συντομογραφίες (ν : το ύψος) και όχι αριθμούς (Booth, 1984; MacGregor και Stacey, 1994). Επίσης, οι μαθητές που κατανοούν τα γράμματα ως σύμβολα αριθμών έχουν την τάση να θεωρούν τη μεταβλητή ως το σύμβολο του άγνωστου αριθμού που παίρνει μία και μοναδική τιμή. Μόνο αργότερα κατανοεί η πλειοψηφία των μαθητών ότι οι μεταβλητές στην άλγεβρα μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή μέσα από ένα σύνολο αριθμών (Asquith και συνεργάτες, 2007).

Ένα ερώτημα που μέχρι πρόσφατα δεν είχε απασχολήσει τη βιβλιογραφία είναι τι είδους αριθμούς θεωρούν οι μαθητές ότι μπορούν να πάρουν οι μεταβλητές. Με άλλα λόγια, το κατά πόσο οι μαθητές θεωρούν ότι μία μεταβλητή μπορεί να αναπαραστήσει τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό. Σε μια σειρά προηγούμενων μελετών τους οι Χρήστου και Βοσνιάδου (Christou και Vosniadou, 2005; Christou, Vosniadou, και Vamvakoussi, 2007) διερεύνησαν την υπόθεση ότι οι μαθητές θα τείνουν να θεωρούν τα γράμματα ως σύμβολα φυσικών αριθμών και ότι η διαδικασία

κατανόησης της χρήσης της μεταβλητής ως συμβόλου που θα μπορούσε να αναπαραστήσει τον οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό θα είναι αργή, επίπονη και θα χαρακτηρίζεται από ενδιάμεσα στάδια κατανόησης. Η συγκεκριμένη υπόθεση έχει εκφραστεί στα πλαίσια μιας ευρύτερης προβληματικής που αφορά στο φαινόμενο της προκατάληψης του φυσικού αριθμού (βλ. Ni και Zhou, 2005) και της μάθησης με εννοιολογική αλλαγή (Vosniadou, Vamvakoussi και Skopeliti, 2008). Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογική αλλαγής στη γνωστική ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού (Vosniadou και συνεργάτες, 2008) οι μαθητές ήδη από την προσχολική ηλικία οργανώνουν μια αρχική κατανόηση του αριθμού γύρω από την έννοια του φυσικού αριθμού. Μια τέτοια κατανόηση του αριθμού επιβεβαιώνεται και ενισχύεται από τη σχολική διδασκαλία, όπου οι ιδιότητες των φυσικών διδάσκονται με συστηματικό πλέον τρόπο. Ως αποτέλεσμα, η κατανόηση του αριθμού με βάση τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών, καταλήγει να αποτελεί ένα κυρίαρχο εναλλακτικό πλαίσιο των μαθητών για τους αριθμούς, στο οποίο συχνά αναφέρονται με έναν άδηλο τρόπο, όταν έχουν να αντιμετωπίσουν προβλήματα με αριθμούς (Ni και Zhou, 2005; Smith, Solomon και Carey, 2005).

Οι παραπάνω επισημάνσεις υποστηρίζουν ότι το πέρασμα από μια αρχική κατανόηση του αριθμού που οργανώνεται στην βάση των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών σε μια κατανόηση του αριθμού ως ενός ενιαίου εννοιολογικού πλαισίου που περιλαμβάνει τόσο τους φυσικούς αριθμούς όσο και τους ρητούς και τους πραγματικούς αριθμούς, δημιουργεί αυξημένες δυσκολίες στους μαθητές. Έτσι, για πολλούς μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης το σύνολο των ρητών αριθμών αποτελείται από επιμέρους ανεξάρτητα μεταξύ τους “σύνολα” αριθμών, όπως τους φυσικούς αριθμούς, τα κλάσματα και τους δεκαδικούς (Kilpatrick, Swafford και Findell, 2001; Vamvakoussi και Vosniadou, 2010). Έστω κι αν δε αναμένεται από μαθητές αυτής της ηλικίας να έχουν αναπτύξει μια εκλεπτυσμένη κατανόηση του συνεχούς του συνόλου των πραγματικών αριθμών, από την άλλη μεριά, η κατανόηση των ρητών και των πραγματικών αριθμών ως ένα κατακερματισμένο σύνολο και η αδυναμία κατανόησης των πολλών και διαφορετικών συμβολικών τους αναπαραστάσεων θα μπορούσε να αποτελέσει ανασταλτικό παράγοντα για την κατανόηση της μεταβλητής ως ένα σύμβολο που θα μπορούσε να αναπαραστήσει πολλούς και διαφορετικού είδους αριθμούς.

Με βάση τα παραπάνω εκφράστηκε η υπόθεση ότι κατά την εισαγωγή τους στην άλγεβρα οι μαθητές θα εμφανίζουν την τάση να κατανοούν τις μεταβλητές χρησιμοποιώντας το εναλλακτικό τους πλαίσιο για τους αριθμούς, που είναι οργανωμένο γύρω από το φυσικό αριθμό. Στην περίπτωση αυτή θα ερμηνεύουν τις μεταβλητές ως σύμβολα φυσικών αριθμών, αποδίδοντάς τους ιδιότητες των φυσικών αριθμών, και αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα συγκεκριμένα λάθη και παρερμηνείες σε διάφορα πεδία της άλγεβρας, όπως στην κατανόηση των τιμών που μπορούν να πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν μεταβλητές. Πιο συγκεκριμένα, υπήρχε η εκτίμηση ότι οι μαθητές θα εμφανίζουν την τάση να δίνουν μόνο φυσικούς αριθμούς στις μεταβλητές όταν αυτές εμφανίζονται σε αλγεβρικές παραστάσεις και

επίσης ότι ακόμα κι όταν οι μαθητές είναι πρόθυμοι να δώσουν μη-φυσικούς αριθμούς στις μεταβλητές δεν θα δεχόντουσαν απαραίτητα κάθε πραγματικό αριθμό ως πιθανή αντικατάσταση, αλλά συγκεκριμένα μόνο ήδη μη-φυσικών αριθμών. Για παράδειγμα, θα δεχόντουσαν μόνο ακεραίους ή μόνο θετικούς αριθμούς, ή μόνο δεκαδικούς αλλά όχι κλάσματα και με αυτόν τον τρόπο θα διατηρούσαν κάποια από τα χαρακτηριστικά του φυσικού αριθμού όπως το πρόσημό του ή τη μορφή του (υπό την έννοια ότι ένα κλάσμα μοιάζει λιγότερο με έναν φυσικό αριθμό απ' ό,τι ένας δεκαδικός αριθμός).

Σε μια σειρά μελετών που είχαν στόχο να διερευνήσουν τις παραπάνω υποθέσεις οι Χρήστου και Βοσνιάδου έδωσαν σε μαθητές Β' και Γ' Γυμνασίου αλγεβρικές παραστάσεις όπως α , $-\beta$, 4γ , α/β , $\kappa+3$, και τους ρώτησαν για τα είδη των αριθμών που θεωρούσαν ότι θα μπορούσαν ή δεν θα μπορούσαν να πάρουν οι μεταβλητές, χρησιμοποιώντας ανοιχτού (Christou και Vosniadou, 2005) και κλειστού τύπου ερωτηματολόγια (Christou και συνεργάτες, 2007). Σε έρευνα που ακολούθησε (Χρήστου και Βοσνιάδου, 2007) ζητήθηκε από τους μαθητές να δώσουν τιμές στις μεταβλητές δύο συναρτήσεων ώστε να κατασκευάσουν πίνακα τιμών και να κάνουν τη γραφική τους παράσταση. Επίσης, έδωσαν σε μαθητές Α' Λυκείου αλγεβρικές ανισώσεις, όπως $5\delta > 4/\delta$, και τους ρώτησαν αν αυτές εκφράζουν αληθείς ή ψευδείς σχέσεις για κάθε αριθμό που θα μπορούσε να πάρει η μεταβλητή (Christou και Vosniadou, υπό έκδοση).

Ανεξάρτητα από τη μέθοδο ή τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα έδειξαν ότι πολύ λίγοι μαθητές ήταν σε θέση να δεχθούν κάθε πραγματικό αριθμό ως πιθανή τιμή μιας μεταβλητής. Στα ερωτήματα ανοιχτού τύπου, όπου οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να δώσουν αυθόρμητες απαντήσεις, ήταν έντονη η τάση να δίνουν μόνο φυσικούς αριθμούς στις μεταβλητές, ανεξάρτητα από το πλαίσιο στο οποίο εμφανιζόταν (αλγεβρικές παραστάσεις ή συναρτήσεις). Έστω κι αν η τάση αυτή των μαθητών δεν ήταν επιβλαβής σε περιπτώσεις όπου απλά απάντησαν με φυσικούς αριθμούς στην ερώτηση “τι αριθμούς θα μπορούσε να πάρει το α ;” καθώς τέτοιοι αριθμοί αποτελούν μέρος του συνόλου τιμών της μεταβλητής, παρόλα αυτά οδήγησε 78.2% των μαθητών Α' Λυκείου σε λανθασμένες και ελλιπείς απαντήσεις όταν τους ζητήθηκε να κάνουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης (Χρήστου και Βοσνιάδου, 2007).

Δοκιμάστηκε επίσης η μεθοδολογία των ερωτημάτων κλειστού τύπου (Christou, και συνεργάτες 2007) διότι θεωρούνται σε γενικές γραμμές ευκολότερα για τους μαθητές, ειδικά όταν η σωστή απάντηση είναι μία από τις δοσμένες εναλλακτικές επιλογές (π.χ., Vlahovic-Štetic, Pavlin-Bernardic και Rajter, 2010). Δόθηκε στους μαθητές ένα σύνολο αριθμών που περιλάμβανε όλα τα είδη των αριθμών (θετικούς και αρνητικούς ακεραίους, δεκαδικούς και κλάσματα) και τους ζητήθηκε να αποφανθούν αν κάποιοι από αυτούς τους αριθμούς θα πρέπει να αποκλειστούν από τις τιμές που μπορούν να πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις. Η παρουσία των μη-φυσικών αριθμών αποτελούσε ήδη μια νύξη προς τους μαθητές να σκεφτούν με αριθμούς πέραν των φυσικών αριθμών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι μόλις το 18,6%

επέλεξε τη σωστή απάντηση παρόλο που αυτή ήταν μία από τις δοσμένες εναλλακτικές επιλογές. Το 22% των απαντήσεων απέκλεισε όλους εκείνους τους αριθμούς που δεν θα μπορούσαν να προκύψουν από την αντικατάσταση της μεταβλητής με φυσικούς αριθμούς (π.χ., όλους τους αριθμούς εκτός του 4 και 8 στην περίπτωση της ερώτησης ‘ποιους αριθμούς δε μπορεί να πάρει το 4γ;’). Επιπροσθέτως, 8,3% των απαντήσεων απέκλεισε με συστηματικότητα ένα είδος μη-φυσικών αριθμών (π.χ., όλα τα κλάσματα) αλλά όχι ένα άλλο (π.χ., δεκαδικούς). Τέλος, 25,4% των απαντήσεων έδειχνε μια άρνηση των μαθητών να δεχθούν αρνητικούς αριθμούς για τις αλγεβρικές παραστάσεις που φαινότουσαν θετικές (π.χ., το 4γ και το κ+3) ενώ αντίστοιχα απέκλειαν τους θετικούς αριθμούς ως πιθανές αντικαταστάσεις στο $-β$. Τέτοιες απαντήσεις έδωσαν και οι μαθητές που δεχόντουσαν μη-φυσικούς αριθμούς ως πιθανές αντικαταστάσεις στις μεταβλητές, με την προϋπόθεση όμως ότι οι τιμές αυτές θα διατηρούν το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων. Αυτή η τάση των μαθητών έχει χαρακτηριστεί ως *προκατάληψη του φαινομενικού προσήμου* (Christou και Vosniadou, υπό έκδοση).

Για να συνοψίσουμε, σε μια σειρά μελετών οι Χρήστου και Βοσνιάδου πρόσφεραν ευρήματα που υποστηρίζουν την υπόθεση ότι οι μαθητές έχουν την τάση να θεωρούν τις μεταβλητές ως σύμβολα που αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς ή συγκεκριμένα μόνο είδη μη-φυσικών αριθμών. Αυτή η τάση εμφανίστηκε ιδιαίτερα ισχυρή στα ερωτήματα ανοιχτού τύπου και πιο μειωμένη αλλά επίσης εμφανής και στα ερωτήματα κλειστού τύπου. Ακόμα και οι μαθητές που εμφανίζονταν έτοιμοι να δεχθούν μη-φυσικούς αριθμούς ως πιθανές αντικαταστάσεις στις μεταβλητές δεν ήταν σε θέση να δεχθούν κάθε πραγματικό αριθμό στη θέση μιας μεταβλητής. Η προκατάληψη του φαινομενικού προσήμου ήταν ένας από τους παράγοντες που περιορίζαν το εύρος των αριθμών που αντικαθιστούσαν οι μαθητές στις μεταβλητές.

ΣΤΟΧΟΙ ΚΑΙ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στόχος της παρούσας μελέτης ήταν να εξετάσουμε αν οι Φλαμανδοί μαθητές αντιμετωπίζουν τις ίδιες δυσκολίες και λάθη με αυτά που παρατηρήθηκαν στους Έλληνες μαθητές, όσον αφορά τους αριθμούς που θεωρούν ότι μπορούν να πάρουν οι μεταβλητές. Τα παραπάνω αποτελέσματα που δείχνουν ότι υπάρχει μία έντονη τάση στους μαθητές να θεωρούν τα γράμματα ως σύμβολα φυσικών αριθμών έχει μέχρι στιγμής παρατηρηθεί μόνο σε δείγματα Ελλήνων μαθητών. Με βάση το θεωρητικό πλαίσιο που συνοπτικά παρουσιάσαμε παραπάνω, τα λάθη και οι δυσκολίες αυτές δεν είναι τυχαία αλλά έχουν βαθύτερες εννοιολογικές βάσεις και οφείλονται στην επίδραση ενός εναλλακτικού εννοιολογικού πλαισίου των μαθητών για τον αριθμό, που είναι οργανωμένο γύρω από το συμβολισμό και τις ιδιότητες των φυσικών αριθμών. Υπό την έννοια αυτή τα συγκεκριμένα λάθη και οι δυσκολίες που παρατηρήθηκαν δεν θα αναμέναμε να είναι ίδιον των Ελλήνων μαθητών, που πιθανά οφείλεται σε ιδιαιτερότητες του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος, αλλά ότι θα εμφανίζονται και σε άλλους μαθητές, σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό. Η παρούσα, λοιπόν, μελέτη έχει στόχο να διερευνήσει το συγκεκριμένο ερώτημα, σε δείγμα Φλαμανδών μαθητών. Με βάση τα παραπάνω, θα περιμέναμε ότι οι

Φλαμανδοί μαθητές θα εμφάνιζαν τα ίδια ή παρόμοια λάθη και δυσκολίες με την έννοια της μεταβλητής με τους Έλληνες μαθητές που βρίσκονται στην ίδια ηλικία.

Ένα σημαντικό δεδομένο που αφορά το δείγμα των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα αποτελεί το γεγονός ότι τόσο η Ελλάδα όσο και το Βέλγιο (από όπου προέρχεται το δείγμα των Φλαμανδών μαθητών της παρούσας μελέτης) συμμετείχαν στο Διεθνές Πρόγραμμα για την Αξιολόγηση των Μαθητών (Programme for International Student Assessment, PISA). Οι επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών στον εν λόγω διαγωνισμό ήταν συστηματικά χαμηλότερες του διεθνούς μέσου όρου. Αντίθετα, οι Φλαμανδοί συνομήλικοί τους είχαν μια από τις υψηλότερες θέσεις στη διεθνή κατάταξη, ενώ ήταν πρώτοι στο διαγωνισμό του 2003 που είχε εστιάσει ειδικά στη μαθηματική παιδεία (όλες οι σχετικές πληροφορίες βρίσκονται στο <http://pisacountry.acer.edu.au/>).

Μία απευθείας σύγκριση ανάμεσα στα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης και της αρχικής μελέτης των Χρήστου και Βοσνιάδου δε θα ήταν δυνατή καθώς στην αρχική μελέτη συμμετείχαν μόλις 16 μαθητές. Παρόλα αυτά, θα είχε σημασία να εξετάσουμε κατά πόσο οι Φλαμανδοί μαθητές κάνουν τα ίδια λάθη με τους Έλληνες μαθητές, ή αν πώς και σε ποιο βαθμό τα λάθη τους διαφοροποιούνται. Δεδομένου ότι οι Φλαμανδοί μαθητές έχουν πολύ υψηλότερες επιδόσεις στους διαγωνισμούς PISA από τους Έλληνες συμμαθητές τους, θα περίμενε κανείς ότι θα είχαν καλύτερη επίδοση και στα συγκεκριμένα ερωτήματα. Παρόλα αυτά, με βάση το θεωρητικό μας πλαίσιο θα αναμέναμε ότι και αυτοί οι μαθητές θα εμφάνιζαν δυσκολία να δεχθούν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό ως πιθανή αντικατάσταση μιας μεταβλητής και ότι θα υπάρχουν ενδιάμεσα στάδια κατανόησης, όπου οι μαθητές θα δέχονται συγκεκριμένα είδη αριθμών αλλά όχι άλλα.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες της παρούσας μελέτης ήταν 128 Φλαμανδοί μαθητές επίπεδου Γ' Γυμνασίου (με βάση το Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα). Οι μαθητές προέρχονταν από τρία διαφορετικά σχολεία της Φλαμανδίας, στο Βέλγιο. Σε αυτή την ηλικία οι μαθητές και των δύο χωρών έχουν διδαχθεί την έννοια της μεταβλητής και έχουν αποκτήσει αρκετή εμπειρία με τη χρήση της σε διάφορες μαθηματικές δραστηριότητες, όπως σε εξισώσεις, ανισώσεις, συναρτήσεις και λύση μαθηματικού προβλήματος. Επίσης, στην ηλικία αυτή οι μαθητές έχουν διδαχθεί την έννοια του ρητού και του πραγματικού αριθμού. Ένας άλλος λόγος που επιλέχθηκε η συγκεκριμένη βαθμίδα ήταν ότι σε αυτή την βαθμίδα διεξήχθησαν και οι διαγωνισμοί του προγράμματος PISA και έτσι έχουμε κάποια παραπάνω δεδομένα που αφορούν το συνολικό επίπεδο μαθηματικής γνώσης των συμμετεχόντων.

Υλικά - Διαδικασία

Χρησιμοποιήσαμε το ίδιο ερωτηματολόγιο με τα έξι ερωτήματα πολλαπλών επιλογών που είχαν χρησιμοποιήσει σε προηγούμενη μελέτη οι Christou και

συνεργάτες (2007). Κάθε ερώτημα παρουσίαζε στους μαθητές μία από τις ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν μεταβλητές: α , $-\beta$, 4γ , α/β , $\delta+\delta+\delta$, $\kappa+3$. Για κάθε μία παράσταση δίνονταν στους μαθητές ένα σύνολο από 11 αριθμητικές τιμές που περιλάμβανε ακέραιους αριθμούς, δεκαδικούς και κλάσματα, τόσο θετικούς όσο και αρνητικούς. Από τους μαθητές ζητούνταν να αποφασίσουν αν ανάμεσα στους δοσμένους αριθμούς υπήρχαν κάποιοι που θεωρούν ότι δε θα μπορούσε να τους πάρει η συγκεκριμένη αλγεβρική παράσταση. Η δωδέκατη εναλλακτική απάντηση ήταν πάντοτε η σωστή, δηλαδή ότι “όχι, όλους τους αριθμούς μπορεί να τους πάρει.”

Τα ερωτηματολόγια δόθηκαν στους μαθητές στη σχολική τους τάξη, με την παρουσία του καθηγητή τους των μαθηματικών. Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους περίπου 45 λεπτά για να συμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Χρησιμοποιήθηκε ο ίδιος τρόπος βαθμολόγησης των απαντήσεων των μαθητών όπως στη μελέτη των Christou και συνεργάτες (2007). Πιο συγκεκριμένα, οι απαντήσεις των μαθητών που απέκλειαν όλους τους αριθμούς εκτός από εκείνους που θα προέκυπταν αν δίνονταν μόνο φυσικοί αριθμοί στις μεταβλητές, κατηγοριοποιήθηκαν ως ‘Φυσικοί Αριθμοί Αποκλειστικά’ (ΦΑΑ). Τέτοιες απαντήσεις είναι, για παράδειγμα, να αποκλειστούν όλοι οι αριθμοί εκτός από τα θετικά κλάσματα στην περίπτωση του α/β , ή όλοι οι αριθμοί εκτός από το 4 και το 8 στην περίπτωση του 4γ . Οι απαντήσεις που απέκλειαν μόνο μία συγκεκριμένη κατηγορία από μη-φυσικούς αριθμούς (π.χ., όλα τα κλάσματα στην περίπτωση του α ή $\kappa+3$ αλλά όχι τους δεκαδικούς) κατηγοριοποιήθηκαν ως ‘Συγκεκριμένοι μη-Φυσικοί Αριθμοί’ (ΣΦΑ). Οι απαντήσεις που απέκλειαν αριθμούς με βάση το πρόσημό τους - ανεξάρτητα από το είδος τους - κατηγοριοποιήθηκαν ως ‘Φαινομενικό Πρόσημο’. Ως ‘μη-Συστηματικές’ απαντήσεις κατηγοριοποιήθηκαν οι απαντήσεις στις οποίες αποκλείονταν αριθμοί χωρίς κάποιο σαφές κριτήριο. Τέλος, στην κατηγορία ‘Σωστές’ τοποθετήθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών που επέλεξαν τη δοσμένη σωστή απάντηση.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι απαντήσεις των μαθητών που κατηγοριοποιήθηκαν ως ΦΑΑ ήταν αισθητά περιορισμένες σε σχέση με το αντίστοιχο δείγμα Ελλήνων μαθητών, κάτι που δείχνει ότι οι Φλαμανδοί μαθητές δεν έδειχναν τόσο ισχυρή τάση να ερμηνεύουν τα γράμματα ως σύμβολα αποκλειστικά φυσικών αριθμών (βλ. Πίνακα 1). Αυτό, βέβαια, δε σημαίνει ότι ήταν σε θέση να δεχθούν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό στη θέση των μεταβλητών.

Είδος Απάντησης	α	$-\beta$	α/β	$\kappa+3$	4γ	$\delta+\delta+\delta$	Σύνολο
Δεν απάντησαν	9 7.0%	17 13.3%	5 3.9%	8 6.3%	9 7.0%	11 8.6%	59 7.7%
ΦΑΑ	3	1	1	0	0	1	6

	2.3%	0.8%	0.8%	0.00%	0.00%	0.8%	0.8%
ΣΦΑ	5	5	21	6	9	10	56
	3.9%	3.9%	16.4%	4.7%	7.0%	7.8%	7.3%
Φαινομενικό Πρόσημο	19	53	11	9	15	15	122
	14.8%	41.4%	8.6%	7.0%	11.7%	11.7%	15.9%
μη- Συστηματικές	6	7	17	12	23	23	88
	4.7%	5.5%	13.38%	9.4%	18.0%	18.0%	11.5%
Σωστές	86	45	73	93	72	68	437
	67.2%	35.2%	57.0%	72.7%	56.3%	53.1%	56.9%
Σύνολο	128	128	128	128	128	128	768

Πίνακας 1: Συχνότητες και ποσοστά κάθε κατηγορίας απαντήσεων για κάθε ερώτηση

Πιο συγκεκριμένα, 15,9% των απαντήσεων ήταν επηρεασμένες από το φαινομενικό πρόσημο των αλγεβρικών παραστάσεων και για το λόγο αυτό οι μαθητές απέκλειαν όλους τους αρνητικούς αριθμούς ως τιμές που δε θα μπορούσαν να πάρουν οι αλγεβρικές παραστάσεις που εμφανίζονταν με θετικό πρόσημο (π.χ. στο α ή το κ+3). Αυτή η τάση ήταν ιδιαίτερα εμφανής στην περίπτωση του $-\beta$, όπου 41,1% των απαντήσεων απέκλεισαν τους θετικούς αριθμούς ως τιμές που δε θα μπορούσε να πάρει η συγκεκριμένη παράσταση. Μια άλλη σημαντική παρατήρηση ήταν ότι οι Φλαμανδοί μαθητές απέκλειαν συγκεκριμένα είδη μη-φυσικών αριθμών από κάποιες αλγεβρικές παραστάσεις (κατηγορία ΣΦΑ) ενώ επέτρεπαν άλλα, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση του α/β (16,4%). Το ποσοστό των σωστών απαντήσεων ήταν αρκετά υψηλότερο από ότι στη μελέτη των Christou και συνεργάτες (2007), αλλά παρόλα αυτά στην πλειοψηφία των ερωτημάτων ήταν χαμηλότερο από 60% και σε κάποιες περιπτώσεις ήταν κατώτερο ακόμα και του 50%. Η άρνηση των μαθητών να δεχθούν οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό ως τιμή που θα μπορούσε να πάρει μια μεταβλητή γίνεται πιο εμφανής αν εξετάσουμε το σύνολο των σωστών απαντήσεων που δίνει ο κάθε μαθητής. Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει την κατηγοριοποίηση των μαθητών με βάση τον αριθμό των σωστών απαντήσεων κάθε μαθητή στο σύνολο των έξι ερωτήσεων του ερωτηματολογίου.

Σωστές	0	1	2	3	4	5	6	Σύνολο
N	15	16	12	19	20	16	30	128
%	11.7%	12.5%	9.4%	14.8%	15.6%	12.5%	23.4%	100.0%

Πίνακας 2: Συχνότητες και ποσοστά των μαθητών που έδωσαν από καμία μέχρι έξι σωστές απαντήσεις στο σύνολο των έξι ερωτήσεων

Φαίνεται ότι μόλις το 23,4% των μαθητών έδωσαν σωστή απάντηση και στα έξι ερωτήματα, έστω κι αν η σωστή απάντηση ήταν μία από τις δοσμένες εναλλακτικές

τους. Οι υπόλοιποι μαθητές απέκλεισαν κάποιους από τους αριθμούς του συνόλου ως αριθμούς που δε θεωρούν ότι θα μπορούσε να τους πάρουν οι συγκεκριμένες αλγεβρικές παραστάσεις. Έτσι, μόλις το ένα τέταρτο των μαθητών επέλεξε τη σωστή απάντηση σε όλες τις ερωτήσεις, ενώ 48,4% των μαθητών έδωσε το πολύ μέχρι τρεις σωστές απαντήσεις στο σύνολο των έξι ερωτήσεων.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην παρούσα μελέτη εφαρμόσαμε τη μεθοδολογία της μελέτης των Christou και συνεργάτες (2007) σε δείγμα Φλαμανδών μαθητών, με στόχο να διερευνήσουμε αν και σε ποιο βαθμό εμφανίζεται η τάση να θεωρούνται οι μεταβλητές ως σύμβολα φυσικών αριθμών. Έστω κι αν δεν ήταν δυνατόν να γίνουν άμεσες συγκρίσεις με το αντίστοιχο δείγμα Ελλήνων μαθητών λόγω περιορισμένου αριθμού συμμετεχόντων, παρόλα αυτά ήταν δυνατόν να δούμε στις απαντήσεις των μαθητών λάθη που είχαν εμφανιστεί και στους Έλληνες συμμαθητές τους. Πιο συγκεκριμένα, οι απαντήσεις των Φλαμανδών μαθητών έδειξαν μικρότερη τάση να θεωρούν τις μεταβλητές ως σύμβολα που αναπαριστούν αποκλειστικά φυσικούς αριθμούς, σε σύγκριση με τους Έλληνες συμμαθητές τους. Παρόλα αυτά, η πλειοψηφία των Φλαμανδών μαθητών είχε επίσης δυσκολία να δεχθεί ότι κάθε πραγματικός αριθμός θα μπορούσε να αντικατασταθεί στις μεταβλητές. Όπως και στους Έλληνες μαθητές, έντονη ήταν η τάση και αυτού του δείγματος μαθητών να αποκλείουν συγκεκριμένου τύπου αριθμούς από πιθανές αντικαταστάσεις στις μεταβλητές των αλγεβρικών παραστάσεων όπως, για παράδειγμα, τις τιμές που δεν διατηρούν το φαινομενικό πρόσημο των παραστάσεων. Τα παραπάνω αποτελέσματα ενισχύουν την άποψη ότι αυτές οι δυσκολίες και τα λάθη των μαθητών δεν είναι τυχαία αλλά έχουν βαθύτερες εννοιολογικές ρίζες στο εναλλακτικό εννοιολογικό πλαίσιο των μαθητών για τον αριθμό.

Ενδιαφέρον ερώτημα αποτελεί το γιατί οι απαντήσεις των μαθητών αποκλειστικά με φυσικούς αριθμούς (κατηγορία ΦΑΑ) ήταν τόσο περιορισμένες σε σχέση με το αντίστοιχο ποσοστό των Ελλήνων μαθητών. Για περαιτέρω διερεύνηση αυτού του ερωτήματος θα είχε ενδιαφέρον να εφαρμοστούν στο ίδιο δείγμα Φλαμανδών μαθητών και οι μεθοδολογίες ανοιχτού ερωτηματολογίου, καθώς στο κλειστό ερωτηματολόγιο η παρουσία μη-φυσικών αριθμών έδινε μια επιπλέον ώθηση να σκεφτούν με μη-φυσικούς αριθμούς. Επίσης, μεγάλη σημασία θα είχε να διερευνηθεί σε βάθος ο τρόπος με τον οποίο διδάσκονται οι Φλαμανδοί μαθητές την έννοια της μεταβλητής και να γίνει μία σύγκριση των εκπαιδευτικών προγραμμάτων και των υλικών που χρησιμοποιούν οι καθηγητές στις δύο χώρες. Από μία τέτοια σύγκριση θα μπορούσαν να προκύψουν συγκεκριμένες διδακτικές πρακτικές που είτε θα πρέπει να αποφεύγονται είτε να ακολουθούνται, για να βοηθηθούν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής.

Όπως έχουν επισημάνει οι Sfard και Linchevski (1994) οι ασκήσεις που δίνονται στους μαθητές κατά τη διδασκαλία της άλγεβρας συχνά υποκρύπτουν τις βαθύτερες εννοιολογικές δυσκολίες που έχουν οι μαθητές με τις πιο θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες. Οι δυσκολίες όμως αυτές κάποια στιγμή έρχονται στην επιφάνεια. Τα

αποτελέσματα της παρούσας μελέτης, καθώς και των προηγούμενων μελετών στις οποίες βασίστηκε, επισημαίνουν ότι η περιορισμένη κατανόηση των μαθητών όσον αφορά την έννοια της μεταβλητής στην άλγεβρα, δημιουργεί στους μαθητές σοβαρά προβλήματα σε διάφορα μαθηματικά πεδία όπως για παράδειγμα στη μελέτη των συναρτήσεων, στην κατανόηση των τετραγωνικών ριζών, των απολύτων τιμών και τη λύση των αλγεβρικών ανισώσεων (Christou και Vosniadou, υπό έκδοση). Για το λόγο αυτό θα πρέπει να υπάρξει μια πιο έντονη ευαισθητοποίηση όσον αφορά τη διδασκαλία της έννοιας της μεταβλητής και ειδικά της σχέσης των μεταβλητών με τους αριθμούς που αναπαριστούν.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., και Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 249-272.
- Booth, L. R. (1984). *Algebra: children's strategies and errors*. Windsor: Berkshire: NFER-Nelson.
- Christou, K. P., και Vosniadou, S. (2005). How students interpret literal symbols in algebra: A conceptual change approach. Στο B. G. Bara, L. Barsalou και M. Bucciarelli (Εκδ.), *XXVII Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 453-458). Stresa, Italy.
- Christou, K. P., και Vosniadou, S. (in press). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. *Mathematical Thinking and Learning*.
- Christou, K. P., Vosniadou, S., και Vamvakoussi, X. (2007). Students' interpretations of literal symbols in algebra. Στο S. Vosniadou, A. Baltas και X. Vamvakoussi (Εκδ.), *Re-Framing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction* (pp. 283-297): Elsevier Press.
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. Στο A. Gutiérrez και P. Boero (Εκδ.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., και Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- MacGregor, M., και Stacey, K. (1994). *Progress in learning algebra: Temporary and persistent difficulties*. Άρθρο που παρουσιάστηκε στο Seventeenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Ni, Y., και Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52.
- Sfard, A., και Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification - The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*(26), 191-228.

- Smith, C. L., Solomon, G. E. A., και Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology* (51), 101-140.
- Vamvakoussi, X., και Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, 28 2010(2), 181 - 209.
- Vlahovic-Štetic, V., Pavlin-Bernardic, N., και Rajter, M. (2010). Illusion of linearity in geometry: Effect in multiple-choice problems. *Mathematical Thinking and Learning*. 12(1), 54-67
- Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., και Skopeliti, E. (2008). The framework theory approach to conceptual change. Στο S. Vosniadou (Εκδ.), *Handbook of research on conceptual change* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Χρήστου, Κ. Π., και Βοσνιάδου, Σ. (2007). Πως κατανοούν οι μαθητές τη χρήση των γραμμάτων στα μαθηματικά. Στο Χ. Σακονίδης και Δ. Δεσλή (Εκδ.), *Πρακτικά του 2ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών* (pp. 279-289). Αθήνα: Τυπωθήτω.