2

Ε

ν.

Ε.

Δ

Ι.

Μ.

2ο Πανελλήνιο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής των Μαθηματικών

Τυπικά και άτυπα μαθηματικά: χαρακτηριστικά, σχέσεις και αλληλεπιδράσεις στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης

Πρακτικά Συνεδρίου
23-25 νοεμβριου 2007

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
Σχολή Επιστημών της Αγωγής
Αλεξανδρούπολη
carme2007.edu.duth.gr

τυπωθήτω

«ΠΟΣΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΑΝΑΜΕΣΑ ...;». ΟΨΕΙΣ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΩΝ ΠΑΙΔΙΩΝ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΡΗΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΚΑΙ ΤΟ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟ ΤΟΥΣ

Ξ. Βαμβακούση, Σ. Βοσνιάδου
Πανεπιστήμιο Αθηνών
xenva@phs.uoa.gr, svosniad@phs.uoa.gr

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε μέρος των αποτελεσμάτων μιας εμπειρικής μελέτης σε παιδιά Γυμνασίου και Λυκείου στην οποία διερευνήσαμε ορισμένες πλευρές της κατανόησής τους για τους ρητούς αριθμούς. Χρησιμοποιήσαμε ερωτηματολόγια κλειστού τύπου στα οποία τα παιδιά κλήθηκαν να απαντήσουν στο ερώτημα «πόσοι αριθμοί υπάρχουν» σε διαστήματα με άκρα ρητούς αριθμούς (ακεραίους, δεκαδικούς ή κλάσματα). Υποθέσαμε ότι α) η ιδέα της διακριτότητας των αριθμών, η οποία ισχύει στους φυσικούς, αλλά όχι στους ρητούς, θα ήταν ισχυρή σε όλες τις ηλικιακές ομάδες και β) η συμβολική αναπαράσταση των άκρων του διαστήματος θα επηρέαζε τις αποκρίσεις των παιδιών τόσο ως προς το πλήθος όσο και ως προς το «είδος» (δεκαδικοί, κλάσματα) των ενδιάμεσων αριθμών. Τα αποτελέσματα είναι σύμφωνα με τις υποθέσεις μας.

Εισαγωγή

Οι ρητοί αριθμοί είναι ένα βασικό κομμάτι των αναλυτικών προγραμμάτων για τα μαθηματικά παγκοσμίως και αποτελούν έναν από τους κεντρικούς στόχους περιεχομένου της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ωστόσο, είναι ευρέως γνωστό και τεκμηριωμένο ότι οι μαθητές συναντούν μεγάλες δυσκολίες στην κατανόησή τους (βλ. Smith, Carey, & Solomon 2005). Ορισμένοι ερευνητές επισημαίνουν ότι πολλές από τις γνωστές παρανοήσεις των μαθητών για τους ρητούς οφείλονται στην καταχρηστική μεταφορά της γνώσης τους για τους φυσικούς αριθμούς στο πεδίο των ρητών αριθμών (βλ. Yujing & Yong-Di 2005 για μια ανασκόπηση). Για παράδειγμα, πολλά παιδιά δυσκολεύονται στη σύγκριση δεκαδικών γιατί πιστεύουν ότι «όσα περισσότερα ψηφία έχει ένας αριθμός τόσο μεγαλύτερος είναι» (Moskal & Magone 2000). Επίσης, πολλά παιδιά πιστεύουν ότι «ο πολλαπλασιασμός μεγαλώνει και η διαίρεση μικραίνει τους αριθμούς» (Fischbein et al. 1985), κάτι που ισχύει για τους φυσικούς, αλλά όχι για ρητούς που είναι μικρότεροι της μονάδας.

Παρόμοια ευρήματα είναι απολύτως συμβατά με τις εξηγήσεις και τις προβλέψεις του θεωρητικού πλαισίου της εννοιολογικής αλλαγής που υιοθετούμε (Vosniadou

2007). Βασική υπόθεση του πλαισίου αυτού είναι ότι, πριν ακόμα εκτεθούν στην τυπική εκπαίδευση, τα παιδιά αναπτύσσουν μια αρχική κατανόηση για τον αριθμό, οργανωμένη στη βάση θεμελιωδών ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών με τις οποίες έρχονται σε επαφή στα πλαίσια του κοινωνικο-πολιτισμικού τους περιβάλλοντος και που συνδέονται στενά με την πράξη της απαρίθμησης (βλ. και Gelman 2003). Αυτή η αρχική κατανόηση για τον αριθμό ευνοεί τη μάθηση και την κατανόηση σχετικά με τους φυσικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, υποστηρίζει τα παιδιά να δομήσουν την «αρχή του επόμενου» (δηλ. ότι δεδομένου ενός φυσικού, υπάρχει πάντα ο επόμενός του και είναι μοναδικός), η οποία τους επιτρέπει να συνάγουν την απειρία των φυσικών αριθμών (Hartnett & Gelman 1998). Επίσης, υποστηρίζει την ανάπτυξη στρατηγικών πρόσθεσης και αφαίρεσης βασισμένων στο μέτρημα (Smith et al. 2005), όπως και τη σύγκριση και τη διάταξη φυσικών αριθμών. Αυτό το σύνθετο πλέγμα από έννοιες, σχέσεις και πράξεις, του οποίου θεμελιώδης προϋπόθεση είναι η διακριτότητα των αριθμών (Gelman 2003), συνιστά ένα αρχικό επεξηγηματικό πλαίσιο για τον αριθμό, το οποίο σταθεροποιείται και ενισχύεται στα πρώτα χρόνια της σχολικής εκπαίδευσης, όταν οι φυσικοί αριθμοί αποτελούν βασικό διδακτικό στόχο.

Στο ελληνικό σχολείο, από τη Γ΄ Δημοτικού και μετά, εισάγονται τα κλάσματα και οι δεκαδικοί, ενώ στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου διδάσκονται και οι αρνητικοί. Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής (Vamvakoussi & Vosniadou 2007, Vosniadou 2007), τα αρχικά επεξηγηματικά πλαίσια των παιδιών για τον αριθμό συνιστούν τη βάση πάνω στην οποία ερμηνεύονται οι νέες πληροφορίες για τους αριθμούς, οι οποίες ενσωματώνονται σταδιακά, εμπλουτίζοντάς τα. Ωστόσο, όταν οι νέες πληροφορίες δεν είναι συμβατές με θεμελιώδεις προϋποθέσεις του υπάρχοντος πλαισίου, προβλέπεται ότι η κατανόησή τους είναι αργή, δύσκολη και συνοδεύεται από παρανοήσεις. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τέτοιου είδους παρανοήσεις τεκμηριώνονται στη βιβλιογραφία του χώρου της έρευνας για τη μαθηματική εκπαίδευση.

Ένα θέμα που δεν έχει διερευνηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία είναι η ανάπτυξη της κατανόησης των παιδιών για τη μη διακριτή δομή των ρητών (βλ. Smith et al. 2005). Ένας πιθανός λόγος γι΄ αυτό είναι ότι η δομή των ρητών δεν αποτελεί απαραίτητα διδακτικό στόχο της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας μαθηματικής εκπαίδευσης, όπως άλλωστε και στην περίπτωση του ελληνικού προγράμματος σπουδών. Ωστόσο, θεωρήσαμε ότι τα έργα σχετικά με τη δομή των ρητών είναι *παραγωγικά έργα* (Vosniadou 2007), με την έννοια ότι αποτελούν έναυσμα για τα παιδιά να αξιοποιήσουν όσα γνωρίζουν, ώστε να αντιμετωπίσουν ένα νέο πρόβλημα. Από αυτή την άποψη, θεωρήσαμε ότι η διερεύνηση του συγκεκριμένου θέματος μπορεί να αποκαλύψει κάποιες όψεις της σκέψης των παιδιών για τους ρητούς αριθμούς.

Το σύνολο των ρητών: Μια επέκταση του συνόλου των φυσικών;

Από μαθηματική άποψη, το σύνολο των ρητών είναι μια επέκταση του συνόλου των φυσικών, η οποία μπορεί να αποδοθεί στην αναγκαιότητα για κλειστότητα της διαίρεσης και της αφαίρεσης. Ωστόσο, το σύνολο που προκύπτει μετά την επέκταση δεν είναι απλά μεγαλύτερο από το σύνολο των φυσικών: Έχει και εντελώς διαφορετική δομή. Αντίθετα με το σύνολο των φυσικών, το οποίο είναι διακριτό, το σύνολο των ρητών είναι πυκνό. Πιο συγκεκριμένα, στο σύνολο των φυσικών, ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε (φυσικούς) αριθμούς, υπάρχει πεπερασμένο πλήθος (φυσικών) αριθμών. Αντίθετα, στο σύνολο των ρητών, ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε (ρητούς) αριθμούς, υπάρχουν άπειροι (ρητοί) αριθμοί.

Το σύνολο των ρητών έχει ακόμα μια ιδιαιτερότητα, η οποία είναι πιθανόν να επηρεάζει την κατανόηση της δομής του: Κάθε στοιχείο του μπορεί να συμβολιστεί με περισσότερους από έναν τρόπους. Για παράδειγμα, ο αριθμός 1/2 μπορεί να συμβολιστεί και ως 4/8 ή ως 0,5. Για έναν «αρχάριο» στα μαθηματικά, το να αντιληφθεί ότι διαφορετικά σύμβολα μπορούν να αναπαριστούν το ίδιο αντικείμενο αποτελεί μια μεγάλη δυσκολία (Markovitz & Sowder 1991). Η δυσκολία αυτή μπορεί να αποδοθεί και στη γενικότερη τάση που παρουσιάζουν οι «αρχάριοι» σε έναν τομέα να κατηγοριοποιούν αντικείμενα βάσει επιφανειακών χαρακτηριστικών (π.χ. Chi, Feltovich & Glaser 1981), μια τάση που στην περίπτωση των αριθμών ενδεχομένως ενισχύεται από το γεγονός ότι τα κλάσματα και οι δεκαδικοί διαφέρουν και ως προς τη διάταξη, καθώς και ως προς τις πράξεις.

Με βάση τα παραπάνω, υποθέσαμε ότι η ιδέα της διακριτότητας περιορίζει την κατανόηση της δομής των ρητών, μια υπόθεση που στηρίζεται και από ευρήματα προηγούμενων ερευνών (π.χ. Malara 2001, Merenluoto & Lehtinen 2002). Επίσης, υποθέσαμε ότι τα παιδιά θεωρούν ότι οι διαφορετικές αναπαραστάσεις ενός ρητού αντιστοιχούν σε διαφορετικούς αριθμούς (βλ. και Khoury & Zazkis 1994, O'Connor 2001), κάτι που έχει ως αποτέλεσμα να θεωρούν τους δεκαδικούς και τα κλάσματα ως ξένα μεταξύ τους υποσύνολα των ρητών.

Με βάση τις υποθέσεις αυτές, προβλέψαμε ότι όταν κληθούν να απαντήσουν στο ερώτημα πόσοι αριθμοί υπάρχουν σε ένα διάστημα με ρητά άκρα, τα παιδιά α) θα αναφέρουν ένα πεπερασμένο πλήθος αριθμών, αποδίδοντας στο διάστημα διακριτή δομή, β) θα είναι απρόθυμα να συμπεριλάβουν κλάσματα ανάμεσα σε δεκαδικούς και το αντίστροφο και γ) θα είναι δυνατόν να περιγράφουν διακριτή δομή για κλάσματα, αλλά πυκνή δομή για δεκαδικούς (ή αντίστροφα).

Η παρούσα μελέτη είναι η τρίτη σε μια σειρά μελετών (Vamvakoussi & Vosniadou 2004, Vamvakoussi & Vosniadou 2007) στις οποίες διερευνήσαμε τις υποθέσεις αυτές σε παιδιά Γ΄ Γυμνασίου και Β΄ Λυκείου με συνεντεύξεις και ερωτηματολόγια ανοιχτού και κλειστού τύπου. Τα ευρήματα αυτών των μελετών ήταν σύμφωνα με τις προβλέψεις μας.

Σχεδιάσαμε την τρίτη μελέτη με στόχο να ενισχύσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματά μας, διευρύνοντας το εύρος των ηλικιακών ομάδων (Α΄ Γυμνασίου, Γ΄ Γυμνασίου, Β΄ Λυκείου) και να διερευνήσουμε την κατανόηση της πυκνότητας των ρητών στην περίπτωση που το διάστημα ορίζεται από ακέραιους αριθμούς. Πιο συγκεκριμένα, προβλέψαμε ότι:

α) Οι μεγαλύτερες τάξεις θα έχουν καλύτερη επίδοση από τις μικρότερες. Η προϋπόθεση της διακριτότητας θα είναι ιδιαίτερα ισχυρή στη μικρότερη τάξη, ωστόσο θα παραμένει ισχυρή και στις μεγαλύτερες τάξεις.

β) Το είδος των αριθμών που ορίζουν ένα διάστημα θα επηρεάζει τις αποκρίσεις των παιδιών σε διάφορα επίπεδα. Πιο συγκεκριμένα, i) η επίδοση θα είναι καλύτερη για τους ακέραιους σε σχέση με όλους τους υπόλοιπους αριθμούς και ii) τα παιδιά θα τείνουν να τοποθετούν κλάσματα ανάμεσα σε κλάσματα και δεκαδικούς ανάμεσα σε δεκαδικούς, αλλά θα είναι πιο πρόθυμα να δεχτούν ότι οποιοσδήποτε αριθμός μπορεί να βρίσκεται ανάμεσα σε ακεραίους.

Οι προβλέψεις που αφορούν τους ακεραίους βασίζονται στο γεγονός ότι, ακόμα και μετά την εισαγωγή των ρητών, οι ακέραιοι αριθμοί συνεχίζουν να έχουν προνομιακή θέση σε σχέση με τους άλλους ρητούς τόσο στο πλαίσιο της διδασκαλίας μέσω των παραδειγμάτων που συνήθως παρουσιάζονται (βλ. και Greer & Verschaffel 2007), όσο και στο ευρύτερο κοινωνικο-πολιτισμικό περιβάλλον, στο οποίο τα παιδιά έρχονται σε επαφή με εργαλεία που υποστηρίζουν την κατανόηση της ύπαρξης ενδιάμεσων αριθμών ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς ακεραίους (π.χ. εργαλεία μέτρησης μήκους, όπως ο χάρακας και το γαλλικό μέτρο, αλλά και το ευρώ).

Στο σημείο αυτό θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι η μελέτη που ακολουθεί αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας, στην οποία συμμετείχαν συνολικά 549 παιδιά. Το δείγμα ήταν μοιρασμένο σε δύο διαφορετικές συνθήκες που αφορούσαν στο σχεδιασμό των εργαλείων που χρησιμοποιήθηκαν. Αναφερόμαστε στη μία από τις δύο συνθήκες που περιγράφεται αναλυτικά στα επόμενα.

Μέθοδος

Συμμετέχοντες

Στη μελέτη συμμετείχαν 276 παιδιά, 91 στην Α΄ Γυμνασίου, 84 στη Γ΄ Γυμνασίου και 101 στη Β΄ Λυκείου από 6 δημόσια σχολεία της Αθήνας.

Υλικό

Σχεδιάσαμε ένα κλειστό ερωτηματολόγιο με 14 ερωτήσεις. Οι ερωτήσεις ήταν της μορφής «Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα σε» δύο ρητούς αριθμούς. Τα άκρα των δεδομένων διαστημάτων συμπεριλάμβαναν α) δύο ακέραιους, β) έναν ακέραιο και ένα δεκαδικό με 1 δεκαδικό ψηφίο, γ) έναν ακέραιο και ένα δεκαδικό με 3 δεκαδικά ψηφία, δ) δύο δεκαδικούς με 1 δεκαδικό ψηφίο, ε) δύο δεκαδικούς με 3 δεκαδικά ψηφία, στ) δύο ομώνυμα κλάσματα και ζ) δύο ετερώνυμα κλάσματα. Για καθένα από τα (α)-(ζ) υπήρχαν 2 έργα. Σε όλες τις ερωτήσεις, οι δεδομένοι αριθμοί ήταν ψευδοδιαδοχικοί (π.χ. 0,1-0,2, $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}-\frac{3}{5}$).

Έτσι, το ερωτηματολόγιο αποτελείτο από 4 ομάδες ερωτήσεων: την ομάδα των ερωτήσεων με ακεραίους ($Ο_{Ακ}$, 2 ερωτήσεις), με ακεραίους και δεκαδικούς ($Ο_{ΑκΔεκ}$, 4 ερωτήσεις), με δεκαδικούς ($Ο_{Δεκ}$, 4 ερωτήσεις) και με κλάσματα ($Ο_{Κλ}$, 4 ερωτήσεις).

Οι εναλλακτικές απαντήσεις από τις οποίες μπορούσαν να επιλέξουν οι μαθητές ήταν ίδιες για όλες τις ερωτήσεις, οι εξής: α) Δεν υπάρχει κανένας αριθμός, β) Υπάρχει ένα συγκεκριμένο πλήθος δεκαδικών που θα μπορούσαν να γραφτούν ένας-ένας, γ) Υπάρχει ένα συγκεκριμένο πλήθος κλασμάτων που θα μπορούσαν να γραφτούν ένα-ένα, δ) Υπάρχουν άπειροι δεκαδικοί, ε) Υπάρχουν άπειρα κλάσματα, στ) Υπάρχουν άπειροι αριθμοί και μπορούν να έχουν διάφορες μορφές, π.χ. δεκαδικοί, κλάσματα, δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία κ.λπ. Δόθηκε επίσης η εναλλακτική ζ) «Δεν συμφωνώ με κανένα από τα προηγούμενα. Εγώ πιστεύω ότι….», ώστε τα παιδιά να έχουν την ευκαιρία να εκφράσουν μια διαφορετική άποψη.

Διαδικασία

Τα ερωτηματολόγια επιδόθηκαν στο χώρο του σχολείου και τα παιδιά είχαν στη διάθεσή τους μία σχολική ώρα για να τα συμπληρώσουν.

Η ερευνήτρια διάβασε στην τάξη τις οδηγίες, οι οποίες υπήρχαν στην πρώτη σελίδα των ερωτηματολογίων και επεσήμαιναν ότι ο όρος αριθμός αναφέρεται στους πραγματικούς αριθμούς, με τη διευκρίνιση ότι «όλοι οι αριθμοί που γνωρίζετε είναι πραγματικοί», καθώς και ότι η έκφραση «ανάμεσα σε δύο αριθμούς» σημαίνει μεγαλύτερος από τον πρώτο και μικρότερος από το δεύτερο. Τέλος, διαβάστηκε και τονίστηκε ιδιαίτερα στους συμμετέχοντες ότι οι εναλλακτικές απαντήσεις είχαν προκύψει από παιδιά της ηλικίας τους και ότι η σωστή απάντηση δεν ήταν απαραίτητα ανάμεσά τους. Η ερευνήτρια τόνισε στα παιδιά ότι μπορούσαν να επιλέξουν μόνο μία από τις δεδομένες απαντήσεις και τα παρότρυνε να μη διστάσουν να εκφράσουν τη δική τους άποψη.

Αποτελέσματα

Σύμφωνα με το σχεδιασμό μας, επεξεργαστήκαμε κάθε απάντηση σε καθεμία ερώτηση ως προς δύο παραμέτρους. Συγκεκριμένα, κάθε απάντηση:

α) Βαθμολογήθηκε ως προς το πλήθος των αριθμών στο δεδομένο διάστημα [0: καμία απάντηση, 1: κανένας αριθμός ($Πεπ_0$), 2: πεπερασμένο πλήθος αριθμών ($Πεπ_{\neq 0}$), 3: άπειροι αριθμοί της ίδιας συμβολικής αναπαράστασης ($Απ_1$), 4: άπειροι αριθμοί, ανεξάρτητα από τη συμβολική αναπαράσταση ($Απ_2$)]. Η $Απ_2$ αντιστοιχεί στη βέλτιστη απάντηση.

Η βαθμολόγηση αυτή χρησιμοποιήθηκε στον υπολογισμό i) της μέσης συνολικής επίδοσης του κάθε παιδιού στις 14 ερωτήσεις, και ii) της μέσης επίδοσης κάθε παιδιού σε κάθε ομάδα ερωτήσεων ($Ο_{Ακ}$, $Ο_{ΑκΔεκ}$, $Ο_{Δεκ}$, $Ο_{Κλ}$).

β) Κωδικοποιήθηκε ως προς το «είδος» των αριθμών (*Ακέραιοι, Δεκαδικοί, Κλάσματα, Οποιοσδήποτε αριθμός*) στο δεδομένο διάστημα. Να διευκρινίσουμε ότι στην περίπτωση της απάντησης $Πεπ_0$ («δεν υπάρχει κανένας αριθμός») ανάμεσα σε δύο π.χ. δεκαδικούς, όπως το 2,1 και το 2,2, κωδικοποιήσαμε την απάντηση ως *Δεκαδικοί*, γιατί η συγκεκριμένη απάντηση δίνει την πληροφορία ότι ανάμεσα στους συγκεκριμένους αριθμούς αναζητείται ένας αριθμός της μορφής 2,x. Αντίστοιχα και στην περίπτωση των κλασμάτων και των ακεραίων.

Να σημειώσουμε επίσης ότι οι απαντήσεις των (λίγων) παιδιών που αξιοποίησαν την ευκαιρία να εκφράσουν μια διαφορετική άποψη από τις εναλλακτικές του ερωτηματολογίου αξιολογήθηκαν από δύο ανεξάρτητους κριτές με βάση τα παραπάνω κριτήρια.

Ηλικία και Διακριτότητα

Η ανάλυση διακύμανσης στη μέση συνολική επίδοση σε όλες τις ερωτήσεις μεταξύ των ηλικιακών ομάδων (Α΄ Γυμνασίου, Γ΄ Γυμνασίου, Β΄ Λυκείου) έδειξε κύρια επίδραση για την ηλικία [$F(2, 275)= 12,072$, $p<.001$]. Περαιτέρω ανάλυση έδειξε ότι η επίδοση στην Α΄ Γυμνασίου ήταν σημαντικά μικρότερη από τις δύο άλλες τάξεις (Bonferroni, $p<.001$), ενώ δεν βρέθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στη Γ΄ Γυμνασίου και τη Β΄ Λυκείου.

Στον Πίνακα 1 παρουσιάζεται η συχνότητα και το ποσοστό κάθε κατηγορίας απαντήσεων, στο σύνολο των απαντήσεων σε όλες τις ερωτήσεις, ανά τάξη.

Πλήθος αριθμών	*Α΄ Γυμνασίου (N=14x91=1274)*		*Γ΄ Γυμνασίου (N=14x84=1176)*		*Β΄ Λυκείου (N=14x101=1414)*	
$Πεπ_0$	*263*	*20.64%*	*152*	*12.93%*	*173*	*12.23%*
$Πεπ_{\neq 0}$	*411*	*32.26%*	*363*	*30.87%*	*346*	*24.47%*
$Απ_1$	*340*	*26.69%*	*207*	*17.60%*	*282*	*19.94%*
$Απ_2$	*237*	*18.60%*	*444*	*37.76%*	*596*	*42.15%*
Καμία απάντηση	*23*	*1.81%*	*10*	*0.85%*	*17*	*1.20%*

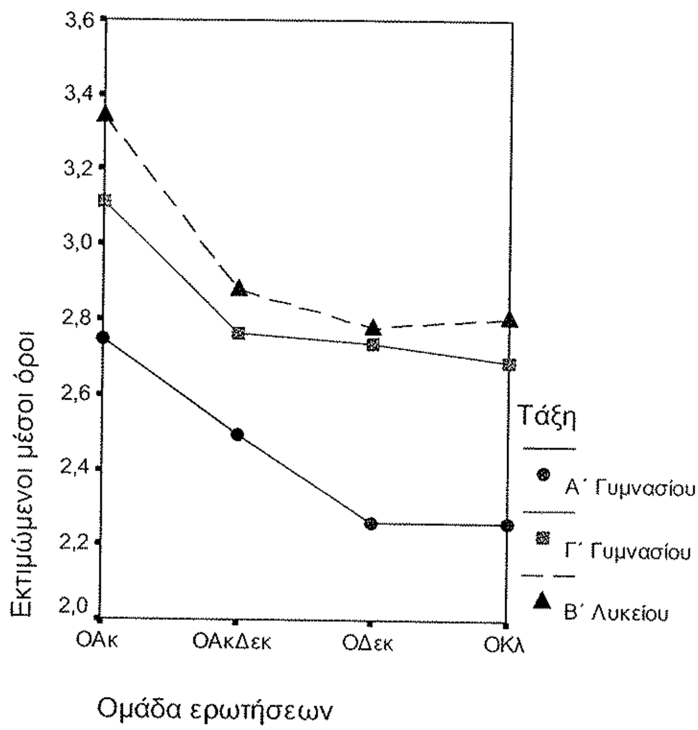
Πίνακας 1: Συχνότητα και ποσοστό κάθε τύπου απάντησης, στο σύνολο των απαντήσεων σε 14 ερωτήσεις, ανά τάξη.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 1, τα παιδιά της Α΄ Γυμνασίου δίνουν συχνότερα την απάντηση $Πεπ_0$ και λιγότερο συχνά την απάντηση $Απ_2$, σε σχέση με τις δύο άλλες ηλικιακές ομάδες.

Από τον Πίνακα 1 φαίνεται επίσης ότι η ιδέα της διακριτότητας είναι ισχυρή για τα παιδιά της Α΄ Γυμνασίου και παραμένει ισχυρή στη Γ΄ Γυμνασίου, αλλά και στη Β΄ Λυκείου. Πράγματι, αθροίζοντας τις απαντήσεις $Πεπ_0$ και $Πεπ_{\neq 0}$, προκύπτει ότι το 52.90% των απαντήσεων στην Α΄ Γυμνασίου, το 43.79% στη Γ΄ Γυμνασίου και το 36.70% στη Β΄ Λυκείου αντανακλούν την ιδέα της διακριτότητας.

Είδος των αριθμών

Διερευνήσαμε τις διαφορές στις μέσες επιδόσεις των παιδιών στις ομάδες ερωτήσεων $Ο_{Ακ}$, $Ο_{ΑκΔεκ}$, $Ο_{Δεκ}$, $Ο_{Κλ}$. Υπενθυμίζουμε ότι οι ομάδες αυτές βασίζονται στο είδος των αριθμών που ορίζουν το διάστημα (*ακέραιοι, ακέραιος-δεκαδικός,* *δεκαδικοί, κλάσματα*). Οι μέσες επιδόσεις στις ομάδες ερωτήσεων υποβλήθηκαν σε ανάλυση διακύμανσης επαναλαμβανόμενων μετρήσεων εντός των ομάδων, με ανεξάρτητη μεταβλητή την τάξη. Τα αποτελέσματα έδειξαν στατιστικά σημαντικές διαφορές τόσο για τις ομάδες αριθμών [$F(3, 273)=39{,}862$, $p<0.001$] όσο και για την τάξη [$F(2, 273)=12{,}912$, $p<0.001$].

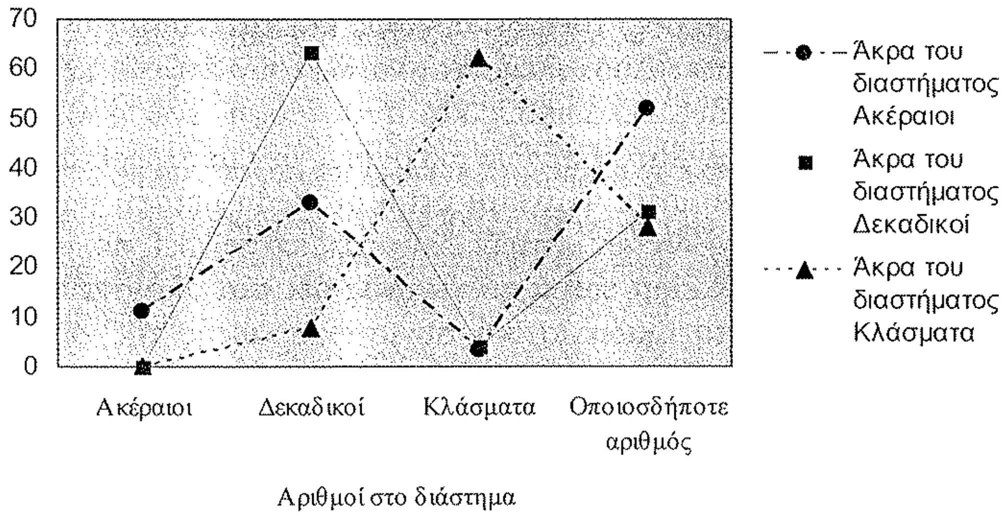


Σχήμα 1: Εκτιμώμενοι μέσοι όροι επίδοσης σε κάθε ομάδα ερωτήσεων, ανά τάξη.

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1, η επίδοση των παιδιών της Γ΄ Γυμνασίου σε κάθε ομάδα αριθμών ήταν σημαντικά χαμηλότερη από τα παιδιά των δύο μεγαλύτερων τάξεων. Τα παιδιά της Β΄ Λυκείου είχαν ελαφρά υψηλότερη επίδοση από τα παιδιά της Γ΄ Γυμνασίου, αλλά η διαφορά αυτή δεν ήταν στατιστικά σημαντική. Για όλες τις τάξεις, η υψηλότερη επίδοση σημειώθηκε στους ακεραίους. Η επίδοση μειώθηκε σταδιακά για τις άλλες ομάδες αριθμών.

Διερευνήσαμε επίσης κατά πόσο επιδρά το είδος των αριθμών (ακέραιοι, δεκαδικοί, κλάσματα) που ορίζουν ένα δεδομένο διάστημα στην επιλογή των παιδιών για το είδος των αριθμών που βρίσκονται στο διάστημα αυτό. Για λόγους οικονομίας, παρουσιάζουμε εδώ τα ποσοστά απαντήσεων σε κάθε κατηγορία (Ακέραιοι, Δεκαδικοί, Κλάσματα, Οποιοσδήποτε αριθμός), στο σύνολο των απαντήσεων σε όλες τις ερωτήσεις, χωρίς να διαφοροποιούμε ως προς την τάξη (Σχήμα 2).

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2, υπάρχει μια ισχυρή τάση των παιδιών να απαντούν ότι ανάμεσα στους δεκαδικούς υπάρχουν δεκαδικοί αριθμοί, ενώ ανάμεσα στα κλάσματα υπάρχουν κλάσματα. Επίσης, φαίνεται ότι τα παιδιά απαντούν συχνότερα ότι υπάρχουν αριθμοί διαφόρων συμβολικών αναπαραστάσεων όταν τα άκρα του διαστήματος είναι ακέραιοι αριθμοί, παρά όταν είναι δεκαδικοί ή κλάσματα. Επιπλέον, όταν τα άκρα είναι ακέραιοι, συχνή είναι και η απάντηση ότι στο διάστημα βρίσκονται δεκαδικοί αριθμοί.



Σχήμα 2: Είδος αριθμών σε διάστημα, ανάλογα με το είδος των αριθμών που ορίζουν το διάστημα: Ποσοστά απαντήσεων σε κάθε κατηγορία, στο σύνολο των ερωτήσεων.

Συμπεράσματα-Συζήτηση

Για να κατανοήσουν τα παιδιά ότι σε ένα διάστημα ρητών υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί, είναι απαραίτητο να περάσουν από το αρχικό - στενά συνδεδεμένο με τους φυσικούς - επεξηγηματικό πλαίσιο για τον αριθμό, σε ένα ευρύτερο, συνειδητοποιώντας ότι κάποιες προϋποθέσεις που ίσχυαν στο αρχικό, όπως η προϋπόθεση της διακριτότητας, δεν διατηρούν τη γενικότητα της ισχύος τους. Αναπτύσσοντας αυτό το ευρύτερο επεξηγηματικό πλαίσιο, δεν αρκεί τα παιδιά να δεχτούν ότι ο όρος «αριθμός» αναφέρεται τόσο στους φυσικούς όσο και στους δεκαδικούς και στα κλάσματα – πρέπει επίσης να συνειδητοποιήσουν ότι τα κλάσματα και οι δεκαδικοί (απλοί ή περιοδικοί), παρά τις διαφορές τους στο συμβολισμό, στη διάταξη, στις πράξεις, αλλά και στη χρήση, είναι εναλλακτικές αναπαραστάσεις των ρητών και όχι διαφορετικά είδη αριθμών. Ταυτόχρονα, οι φυσικοί πρέπει να γίνουν και οι ίδιοι κατανοητοί ως *ρητοί αριθμοί*, οι οποίοι μπορούν να συμβολιστούν ως δεκαδικοί ή κλάσματα.

Τα ευρήματα της μελέτης μας δείχνουν ωστόσο ότι παρά τη θετική επίδραση της ηλικίας και της τυπικής εκπαίδευσης, η ιδέα της διακριτότητας είναι ισχυρή μέχρι και τη Β΄ Λυκείου. Να τονίσουμε εδώ ότι και αυτή η θετική επίδραση είναι περιορισμένη, αφού παρατηρείται από την Α΄ Γυμνασίου στη Γ΄ Γυμνασίου, αλλά όχι από τη Γ΄ Γυμνασίου στη Β΄ Λυκείου.

Επιπλέον, σύμφωνα με τα αποτελέσματά μας, τα παιδιά φαίνονται να αντιλαμβάνονται τους ακεραίους, τους δεκαδικούς και τα κλάσματα ως ασύνδετα μεταξύ τους σύνολα αριθμών: Δυσκολεύονται να δεχτούν ότι ένα κλάσμα μπορεί να βρίσκεται ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς και αντίστροφα, ενώ η κατανόηση της ύπαρξης άπειρων αριθμών ανάμεσα σε δύο ακεραίους δεν μεταφέρεται απαραίτητα στους δεκαδικούς ή τα κλάσματα. Φαίνεται ότι η σύνδεση μεταξύ των πολλαπλών συμβολικών αναπαραστάσεων των ρητών δεν έχει επιτευχθεί σε ικανοποιητικό βαθμό μέχρι και τη Β΄ Λυκείου, παρά το γεγονός ότι στα πλαίσια του σχολείου δίνεται μεγάλη έμφαση στη διαδικαστική συνιστώσα αυτής της σύνδεσης (π.χ. μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς και αντίστροφα).

Τα αποτελέσματά μας είναι σύμφωνα με τις προβλέψεις του θεωρητικού πλαισίου της εννοιολογικής αλλαγής, σύμφωνα με το οποίο η διεύρυνση των αρχικών επεξηγηματικών πλαισίων για τον αριθμό, που συνεπάγεται την εκθρόνιση των φυσικών από την προνομιακή τους θέση και προϋποθέτει την ευέλικτη κατανόηση του συμβολισμού των ρητών, ενέχει εννοιολογικές αλλαγές και άρα προβλέπεται σταδιακή, επίπονη και χρονοβόρα. Οι παρανοήσεις των παιδιών που διαφαίνονται στα ευρήματά μας αντανακλούν τον εμπλουτισμό των αρχικών επεξηγηματικών πλαισίων με νέες πληροφορίες για τους μη φυσικούς αριθμούς, ο οποίος ωστόσο δεν συνοδεύεται απαραίτητα από εννοιολογική κατανόηση των ρητών ούτε από μεταγνωσιακή επίγνωση των προϋποθέσεων των αρχικών πλαισίων που συνεχίζουν να θέτουν περιορισμούς στην ερμηνεία και κατανόηση των ρητών.

Βιβλιογραφία

Chi, M.T.H., Feltovich, P.J., & Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, 5, 121–152.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*, 3-17.

Gelman, R. (2003). The epigenesis of mathematical thinking. *Journal of Applied Developmental Psychology*, *21*, 27-37.

Greer, B., & Verschafel, L. (2007). Nurturing conceptual change in mathematics education. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 319-328). Oxford: Elsevier.

Hartnett, P.M., & Gelman, R. (1998). Early understandings of number: Paths or barriers to the construction of new understandings? *Learning and Instruction*, *18*, 341-374.

Khoury, H.A., & Zazkis, R. (1994). On fractions and non-standard representations: Preservice teachers' concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 191–204.

Malara, N. (2001). From fractions to rational numbers in their structure: Outlines for an innovative didactical strategy and the question of density. In J. Novotná (Ed.), *Proceedings of the 2nd Conference of the European Society for Research Mathematics Education*, *II* (pp. 35-46). Praga: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická Faculta.

Markovits, Z., & Sowder, J. (1991). Students' understanding of the relationship between fractions and decimals. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *13*(1), 3-11.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In Limon, M. & L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 233-258). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Moskal, B.M., & Magone, M.E. (2000). Making sense of what students know: Examining the referents, relationships and modes students displayed in response to a decimal task. *Educational Studies in Mathematics*, *43*, 313-335.

O' Connor, M.C. (2001). "Can any fraction be turned into a decimal?" A case study of a mathematical group discussion. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 143-185.

Smith, C.L., Solomon, G.E.A., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology*, *51*, 101–140.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14, 453-467.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers interval? Constraints, synthetic models and the effect of the number line. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 265-282). Oxford: Elsevier.

Vosniadou, S. (2007). The conceptual change approach and its re-framing. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction* (pp. 1-15). Oxford: Elsevier.

Yujing, N. & Yong-Di, Z. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52.