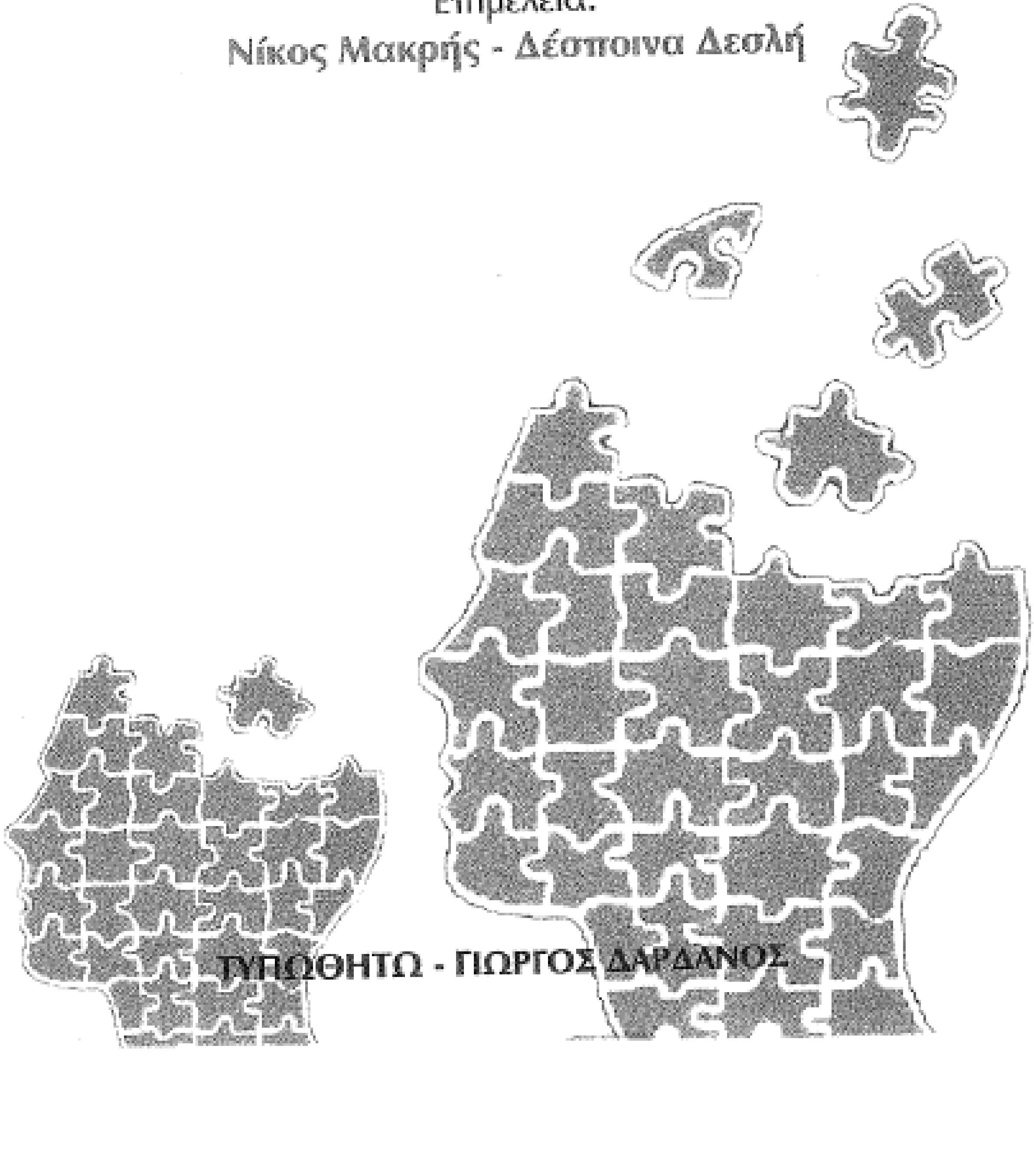
Η ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ ΣΗΜΕΡΑ:

ΓΕΦΥΡΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΝΟΗΣΗΣ

ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ

Επιμέλεια:
Νίκος Μακρής - Δέσποινα Δεσλή



ΤΥΠΩΘΗΤΩ - ΓΙΩΡΓΟΣ ΔΑΡΔΑΝΟΣ

ΣΥΜΠΟΣΙΟ 10

ΓΝΩΣΤΙΚΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

Οργανώτριες: Στέλλα Βοσνιάδου & Ξένια Βαμβακούση, *Πανεπιστήμιο Αθηνών*
Συζητητής: Χαράλαμπος Σακονίδης, *Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης*

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η μάθηση είναι μια σύνθετη διαδικασία, η οποία είναι συνάρτηση πολλών παραγόντων: γνωστικών και μεταγνωστικών, συναισθηματικών, κοινωνικών, επιστημολογικών, παραγόντων που άπτονται του πλαισίου στο οποίο παρουσιάζεται ή λειτουργεί μια γνώση, για να αναφέρουμε κάποιους από αυτούς. Στο συμπόσιο αυτό επικεντρωνόμαστε στη μελέτη της επίδρασης γνωστικών περιορισμών στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Τρεις από τις εργασίες αξιοποιούν το θεωρητικό πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής για να περιγράψουν και να ερμηνεύσουν τις δυσκολίες των μαθητών / φοιτητών στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Αντικείμενο μελέτης αποτελούν οι γνωστικοί περιορισμοί στην κατανόηση της πυκνής δομής των ρητών αριθμών (Βαμβακούση και Βοσνιάδου), στην κατανόηση της χρήσης των γραμμάτων ως αλγεβρικών συμβόλων (Χρήστου και Βοσνιάδου) και στην κατανόηση της έννοιας της εφαπτομένης σε σημείο οποιασδήποτε καμπύλης (Ζαχαριάδης, Μπιζά και Σουγιούλ). Οι Δεσλή και Nunes μελετούν στην εργασία τους την κατανόηση των ιδιοτήτων των εντατικών ποσοτήτων και πώς αυτή περιορίζεται από τη γνώση των ιδιοτήτων των εκτατικών ποσοτήτων. Οι Διακογιώργη και Πόταρη μελετούν τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση οικοδομούν την έννοια του γεωμετρικού σχήματος και, συγκεκριμένα, του τετραπλεύρου. Στην εργασία τους, εξετάζουν πώς ο τρόπος με τον οποίο τα παιδιά αντιλαμβάνονται τα χαρακτηριστικά του τετραπλεύρου μεταβάλλεται με την ηλικία και πώς επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο περιγράφουν τα σχήματα και τις ιδιότητές τους.

ΓΝΩΣΤΙΚΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΗΣ ΔΟΜΗΣ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ξένια Βαμβακούση & Στέλλα Βοσνιάδου
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εισαγωγή

Στην παρούσα έρευνα, μελετάμε την ανάπτυξη της κατανόησης για τη δομή του συνόλου των ρητών αριθμών, υπό το πρίσμα του θεωρητικού πλαισίου της εννοιολογικής αλλαγής της Vosniadou (Vosniadou 1994, 2002; Vosniadou & Brewer, 1994). Σύμφωνα με το πλαίσιο αυτό, η προϋπάρχουσα γνώση οργανώνεται στη βάση διαισθητικών θεωριών του κοινού νου που βασίζονται σε ορισμένες *θεμελιώδεις προϋποθέσεις*. Συνήθως, τα άτομα δεν έχουν επίγνωση των *θεμελιωδών προϋποθέσεων* που στηρίζουν τις διαισθητικές τους θεωρίες, παρότι αυτές περιορίζουν τον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύουν τις εισερχόμενες πληροφορίες. Έτσι, στις περιπτώσεις στις οποίες η καινούργια πληροφορία είναι ασύμβατη με τις προϋπάρχουσες γνωστικές δομές, δημιουργούνται προβλήματα στην κατανόηση. Το θεωρητικό πλαίσιο της Vosniadou προβλέπει τη δημιουργία παρανοήσεων που εξηγούνται ως *συνθετικά μοντέλα*, τα οποία αντανακλούν την επίδραση των θεμελιωδών προϋποθέσεων στην προσπάθεια των ατόμων να ενσωματώσουν τις νέες πληροφορίες στις προηγούμενες γνώσεις τους.

Όσον αφορά την ανάπτυξη μαθηματικών εννοιών, έχει διατυπωθεί ο ισχυρισμός ότι τα παιδιά, ήδη από την προσχολική ηλικία, έχουν διαμορφώσει μια κατανόηση για τους φυσικούς αριθμούς, βασισμένη σε συγκεκριμένες αρχές (Gelman, 2000). Θα μπορούσε να θεωρηθεί μια αρχική «θεωρία» για τον αριθμό, στη βάση της οποίας οργανώνεται η γνώση για τους αριθμούς. Ισχυρή προϋπόθεση της «θεωρίας» αυτής είναι ότι οι αριθμοί είναι μετρητές διακριτών ποσοτήτων. Η διακριτή φύση των αριθμών θεωρείται ως βασική αρχή του αρχικού γνωστικού συστήματος που αφορά στον αριθμό και από ερευνητές που πραγματοποιούν σχετικές έρευνες με βρέφη, ζώα, καθώς και διαπολιτισμικές μελέτες (Dehaene, 1998; Gelman, 2000). Με όρους του θεωρητικού πλαισίου που υιοθετούμε, η ιδέα της διακριτότητας είναι μια *θεμελιώδης προϋπόθεση* της αρχικής θεωρίας των παιδιών για τους αριθμούς.

Υποθέσεις

Πριν διατυπώσουμε τις υποθέσεις της έρευνας, θα αναλύσουμε τρεις διαφορές που υπάρχουν ανάμεσα στο σύνολο των φυσικών (**N**) και στο σύνολο των ρητών αριθμών (**Q**).

- Το **N** έχει διακριτή δομή (ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς φυσικούς, δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός). Αντίθετα, το **Q** έχει πυκνή δομή (ανάμεσα σε οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς, υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί).

- Στο **N**, κάθε στοιχείο έχει μοναδική συμβολική αναπαράσταση. Αντίθετα, στο **Q**, κάθε στοιχείο έχει πολλαπλές συμβολικές αναπαραστάσεις.
- Το **N** είναι ομοιογενές ως προς τα στοιχεία του. Αντίθετα, στο **Q** μπορούν να διακριθούν διαφορετικές κατηγορίες αριθμών. Για παράδειγμα, το **Q** μπορεί να αναλυθεί σε φυσικούς και μη φυσικούς αριθμούς.

Η κεντρική υπόθεση της έρευνας είναι ότι η κατανόηση της δομής των ρητών προϋποθέτει εννοιολογική αλλαγή. Εκτός από τη *θεμελιώδη προϋπόθεση* της διακριτότητας, υποστηρίζουμε ότι πρόσθετοι γνωστικοί περιορισμοί είναι

- η πεποίθηση ότι διαφορετικά σύμβολα αναφέρονται σε διαφορετικά αντικείμενα
- η τάση που παρουσιάζουν οι αρχάριοι σε κάποιο πεδίο να κατηγοριοποιούν με βάση επιφανειακά χαρακτηριστικά.

Κάθε ένας από αυτούς τους γνωστικούς περιορισμούς υποστηρίζει τη γνώση των παιδιών για τους φυσικούς αριθμούς, αλλά έρχεται σε αντίθεση με την καινούργια γνώση για τους ρητούς

Στη βάση του θεωρητικού μας πλαισίου, προβλέπουμε ότι:

- Η κατανόηση της έννοιας της πυκνότητας είναι μια δύσκολη και αργή διαδικασία. Το πέρασμα από την αρχική στην πιο εκλεπτυσμένη μορφή κατανόησης γίνεται σταδιακά και χαρακτηρίζεται από ενδιάμεσα στάδια κατανόησης. Τα ενδιάμεσα στάδια κατανόησης συνοδεύονται από παρανοήσεις που αντανακλούν τη θεμελιώδη προϋπόθεση της διακριτότητας, καθώς και τους δύο γνωστικούς περιορισμούς που προαναφέρθηκαν. Λόγω των δύο τελευταίων, αναμένεται ότι τα παιδιά θα κατηγοριοποιούν τους ρητούς αριθμούς με κριτήριο τη συμβολική τους αναπαράσταση, καταλήγοντας, για παράδειγμα, να θεωρούν υποσύνολα των ρητών τα κλάσματα και τους δεκαδικούς.
- Οι παρανοήσεις είναι ανθεκτικές, τόσο στην επίδραση της ηλικίας, όσο και στην επίδραση της τυπικής εκπαίδευσης. Επιπλέον, οι παρανοήσεις μπορούν να εξηγηθούν ως *συνθετικά μοντέλα*, στα οποία διαφαίνεται η προσπάθεια των παιδιών να εντάξουν καινούργιες γνώσεις για τους ρητούς αριθμούς στην αρχική θεωρία τους για τους φυσικούς.
- Η παρουσία εξωτερικών αναπαραστάσεων και συγκεκριμένα, της ευθείας των πραγματικών αριθμών έχει περιορισμένη επίδραση στην επίδοση των παιδιών στα έργα που αφορούν την έννοια της πυκνότητας.

Μέθοδος

Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες της έρευνας είναι 164 παιδιά της Γ΄ Γυμνασίου και 137 παιδιά της Β΄ Λυκείου. Οι συμμετέχοντες προέρχονται από δύο γυμνάσια και τρία λύκεια της Αττικής. Όλα τα τμήματα του κάθε σχολείου συμμετείχαν στην έρευνα.

Υλικά

Χρησιμοποιήθηκαν ερωτηματολόγια ανοικτού και κλειστού τύπου. Ο σχεδιασμός των ερωτηματολογίων βασίστηκε στα εργαλεία προηγούμενης σχετικής έρευνας (Vamvakoussi & Vosniadou, in press). Κάθε ερωτηματολόγιο αποτελείται από 6 ερωτήσεις, οι οποίες αφορούν στο πλήθος των αριθμών που βρίσκονται σε ένα δεδομένο διάστημα με άκρα ρητούς αριθμούς. Οι ερωτήσεις και στους δύο τύπους ερωτηματολογίων διακρίνονται σε 3 ερωτήσεις στις οποίες παρουσιάζεται η ευθεία των πραγματικών αριθμών και 3 ερωτήσεις, στις οποίες η ευθεία δεν εμφανίζεται.

Διαδικασία

Ανά τμήμα, μοιράστηκαν τυχαία ερωτηματολόγια ανοικτού και κλειστού τύπου. Η συμπλήρωση των ερωτηματολογίων έγινε σε δύο φάσεις: Στην πρώτη φάση, οι μισοί συμμετέχοντες έλαβαν τις ερωτήσεις, στις οποίες εμφανίζεται η ευθεία των πραγματικών αριθμών, ενώ οι υπόλοιποι τις ερωτήσεις στις οποίες η ευθεία δεν εμφανίζεται. Στη δεύτερη φάση, αποσύρθηκε το φύλλο με τις αρχικές ερωτήσεις και οι συμμετέχοντες έλαβαν τις υπόλοιπες.

Αποτελέσματα

Σύμφωνα με τα αποτελέσματά μας,

- Τα παιδιά της Β΄ Λυκείου έχουν καλύτερες επιδόσεις από τα παιδιά της Γ΄ Γυμνασίου (Πίνακας 1). Ωστόσο, η θεμελιώδης προϋπόθεση της διακριτότητας παραμένει ισχυρή (Πίνακας 2).
- Η εγκατάλειψη της ιδέας της διακριτότητας δεν επιτυγχάνεται σε ένα βήμα (Πίνακας 2). Για παράδειγμα, η γνώση ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς αριθμούς δεν μεταφέρεται απαραίτητα στην περίπτωση των κλασμάτων. Επιπλέον, τα παιδιά που απαντούν ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς, ανεξάρτητα από το αν τα άκρα είναι δεκαδικοί ή κλάσματα, μπορεί να περιορίζονται ακόμα από τη συμβολική αναπαράσταση των αριθμών (Πίνακας 3). Για παράδειγμα, αποκλείουν την περίπτωση να υπάρχουν δεκαδικοί αριθμοί ανάμεσα σε δύο κλάσματα.
- Η πεποίθηση ότι οι διαφορετικές συμβολικές αναπαραστάσεις ενός ρητού αριθμού αναφέρονται σε διαφορετικούς αριθμούς διαφαίνεται στις απαντήσεις των παιδιών και στις δύο ηλικιακές ομάδες. Για παράδειγμα, 12.5% των παιδιών απαντούν ότι ανάμεσα στο TYPOS και στο TYPOS υπάρχουν άπειροι αριθμοί, αναφερόμενα στα κλάσματα που είναι ισοδύναμα με το TYPOS.
- Η επίδραση της παρουσίας της ευθείας στην επίδοση των παιδιών είναι περιορισμένη. Επιπλέον, η επίδραση «εξαφανίζεται», όταν η ευθεία αποσύρεται (Πίνακας 1).

Πίνακας 1. *Επίδραση των μεταβλητών στη συνολική επίδοση*

Μεταβλητές	Ανοιχτά		Κλειστά	
	Γυμνάσιο	Λύκειο	Γυμνάσιο	Λύκειο
Ηλικία	Mann-Whitney,	p =.004	Mann-Whitney,	p =.011
Ερωτήσεις με/χωρίς ευθεία	Wilcoxon p =.001	Wilcoxon p >.05	Wilcoxon p =.002	Wilcoxon p >.05
Ευθεία στην Α΄/Β΄ φάση	Mann-Whitney p >0.05	Mann-Whitney p >0.05	Mann-Whitney p >0.05	Mann-Whitney p >0.05

Πίνακας 2. *Κατηγορίες απαντήσεων για τις 6 ερωτήσεις συνολικά- Συχνότητες και ποσοστά*

Κατηγορίες	Ανοικτού τύπου				Κλειστού τύπου			
	Γυμνάσιο		Λύκειο		Γυμνάσιο		Λύκειο	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Απάντηση **«πεπερασμένο πλήθος αριθμών»** και στις 6 ερωτήσεις	39	47	13	19.7	29	35.8	15	21.13
Απάντηση **«άπειροι αριθμοί»** σε 5 το πολύ ερωτήσεις	36	43.4	44	66.6	33	40.74	30	42.25
Απάντηση **«άπειροι αριθμοί»** και στις 6 ερωτήσεις	8	9.6	9	13.6	19	23.46	26	36.7
Σύνολο	83		66		81		71	

Πίνακας 3. *Υποκατηγορίες της κατηγορίας «απάντηση «άπειροι αριθμοί» και στις 6 ερωτήσεις» - Συχνότητες και % ποσοστά*

Υποκατηγορίες	**Κλειστού τύπου**			
	Γυμνάσιο		**Λύκειο**	
	N	**%**	**N**	**%**
«άπειροι αριθμοί της ίδιας μορφής» σε τουλάχιστον 1 από τις 6 ερωτήσεις	9	47.4	11	42.3
«άπειρο αριθμοί, ανεξάρτητα μορφής» και στις 6 ερωτήσεις	10	52.6	15	57.7
Σύνολο (κατηγορία «άπειροι αριθμοί» και στις 6 ερωτήσεις)	19		26	

Σχετικά με τα συνθετικά μοντέλα, τα παιδιά αναφέρθηκαν σε εναλλακτικές περιγραφές ρητών διαστημάτων, ως εξής:

- διαστήματα που διατηρούν τη διακριτή δομή των φυσικών.
- διαστήματα που έχουν διαφορετική δομή, ανάλογα με τη συμβολική αναπαράσταση των άκρων (π.χ. διακριτή, αν τα άκρα έχουν κλασματική μορφή - πυκνή, αν τα άκρα έχουν δεκαδική μορφή).
- διαστήματα που περιέχουν άπειρους αριθμούς της ίδιας συμβολικής αναπαράστασης (π.χ. μόνο κλάσματα).

Τα αποτελέσματα υποστηρίζουν την υπόθεσή μας, ότι η κατανόηση της πυκνότητας απαιτεί εννοιολογική αλλαγή.

Βιβλιογραφία

Dehaene, S. (1998). *The number sense: How the mind creates mathematics.* Harmondsworth Middlesex England: The Penguin Press.

Gelman, R. (2000). The epigenesis of mathematical thinking. *Journal of applied developmental psychology, 21*(1), 27-37.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2002). *Conceptual change in Mathematics: From the set of natural to the set of rational numbers.* Proceedings of the Third European Symposium on Conceptual Change, Turku, Finland.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (in press) Understanding the structure of rational numbers: A conceptual change approach. In L. Verschaffel, & S. Vosniadou (Guest Editors), Conceptual Change in Mathematics Learning and Teaching, Special Issue of *Learning and Instruction.*

Vosniadou, S. (2002). Exploring the relationships between conceptual change and intentional learning. In G. M. Sinatra, & P. R. Pintrich (Eds.), *Intentional Conceptual Change*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vosniadou, S. (1994). Capturing and modelling the process of conceptual change. In S. Vosniadou (Guest Editor), Conceptual Change. Special Issue of *Learning and Instruction*, *4*, 45-69.