

---

Στην τομή της Ψυχολογίας και  
της Διδακτικής των Μαθηματικών

Μια προσωπική πορεία και ένα ερευνητικό πρόγραμμα

---

Ξένια Βαμβακούση, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

# Ψυχολογία και Διδακτική των Μαθηματικών

## Μια περίπλοκη σχέση

- Η Ψυχολογία ανέκαθεν αξιοποιούσε τα Μαθηματικά ως πεδίο ελέγχου για υποθέσεις σχετικά με τις διεργασίες σκέψης, την ανάπτυξη και τη μάθηση
  - Skinner, Hirsch-Luchins, Piaget, ...
- Στα πρώτα της βήματα, η Διδακτική των Μαθηματικών άντλησε από την Ψυχολογία θεωρητικά και μεθοδολογικά εργαλεία για να εξηγήσει φαινόμενα που απασχολούν τη Μαθηματική εκπαίδευση
  - «γνωστικά σχήματα», «κλινική συνέντευξη»,...

---

# 1<sup>ο</sup> Συνέδριο ΔΜ με Ερευνητικό Προσανατολισμό

## ■ 1976 PME

### □ **Psychology** of Mathematics Education

- E. Fischbein
- H. Freudenthal
- R. Skemp

# Αλλά...

- Σταδιακά οι ΔΜ ανέπτυξαν τα δικά τους εργαλεία
  - είτε εξ ανάγκης
    - η Ψυχολογία δεν καλύπτει όλα τα φαινόμενα που ενδιαφέρουν την έρευνα για τη μαθηματική εκπαίδευση
  - είτε εκ προθέσεως
    - επιδιώκοντας να οριοθετήσουν έναν ερευνητικό χώρο διακριτό από αυτόν των Ψ
- Οι Ψ είχαν τις δικές τους ενστάσεις
  - Για τον τρόπο που χρησιμοποιούνταν οι δικές της θεωρίες και εργαλεία

---

# Applications and Misapplications of Cognitive Psychology to Mathematics Education (2000)

## Authors

John R. Anderson, Lynne M. Reder, Herbert A. Simon

## Bibliographic Entry

Anderson, J.R., Reder, L.M., & Simon, H.A. (2000, Summer). Applications and Misapplications of Cognitive Psychology to Mathematics Education. *Texas Educational Review*

**Year:** 2000

**Type:** misc

**Status:** Published

**Category:** Instructional Materials

**Downloads:**

<http://act-r.psy.cmu.edu/papers/misapplied-abs-ja.html>

Applications and Misapplications of Cognitive Psychology to Mathematics Education

---

# Αποτέλεσμα

- Αποξένωση  $\Psi$  &  $\Delta M$ 
  - Σε βαθμό που υπάρχουν εκκλήσεις για επαναπροσέγγιση σε κοινούς ερευνητικούς τόπους
    - Αλλά βλ. και Νευροεπιστήμες και «Νευροεκπαίδευση»

# Στη συγκυρία της απομάκρυνσης ΔΜ και Ψ...

- ... μια διεθνώς αναγνωρισμένη γνωστική/αναπτυξιακή ψυχολόγος προσφέρει ένα μάθημα σε ένα μεταπτυχιακό ΔΜ
  - ΠΜΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
- Στέλλα Βοσνιάδου
  - Μελετά τις σύνθετες επιδράσεις της **προϋπάρχουσας γνώσης** στη μάθηση
  - Στις περιπτώσεις που αυτό που γνωρίζουμε και αυτό που επιδιώκουμε να μάθουμε **δεν είναι συμβατά**
    - **Εννοιολογική αλλαγή**

---

Προϋπάρχουσα γνώση

...και επιδράσεις: Φαινόμενα

---

# Συστηματικά λάθη

- Το  $1/2$  είναι μικρότερο από το  $1/3$ 
  - Γιατί το 2 είναι μικρότερο από το 3
- Το 0,28 είναι μεγαλύτερο από το 0,3
  - γιατί το 28 είναι μεγαλύτερο από το 3
- Ο πολλαπλασιασμός «μεγαλώνει» και η διαίρεση «μικραίνει» τους αριθμούς
- Δεν υπάρχει άλλος αριθμός ανάμεσα στο  $2/5$  και στο  $3/5$   
– ούτε ανάμεσα στο 0.005 και το 0.006
- .....

# Πόσοι αριθμοί...

- ...υπάρχουν ανάμεσα στο  $\frac{3}{8}$  και το  $\frac{5}{8}$ ;

## ➤ Παιδιά Γ΄ Γυμνασίου:

- Είναι το  $\frac{4}{8}$ . Δεν υπάρχει άλλος.
- Είναι οι  $3,1/5$ ,  $3,2/5$  μέχρι το  $3,9/5$
- Υπάρχουν άπειρα κλάσματα
  - Δεν μπορεί να είναι δεκαδικός ενδιάμεσα;
  - Όχι, μόνο κλάσματα

# Γίνεται αὐτόμα πιο παράξενο

- Ο Πάνος (Γ' Γυμνασίου) δηλώνει ότι:
  - Υπάρχουν 9 αριθμοί ανάμεσα στους 0,001 και 0,01.
  - Υπάρχουν άπειροι αριθμοί ανάμεσα στους  $\frac{3}{8}$  and  $\frac{5}{8}$ .
- Μετά από παρακίνηση, εξηγεί:

*Ανάμεσα στο 0,001 και το 0,01 υπάρχουν εννιά αριθμοί. Ή δέκα – δεν είμαι σίγουρος γι' αυτό. Αλλά αν τους κάνεις κλάσματα, τότε μπορείς να βρεις περισσότερους αριθμούς ανάμεσα, άπειρους αριθμούς.*

# Εννοιολογική αλλαγή (I)

Η προσέγγιση της «θεωρίας πλαισίου»

- Από πολύ νωρίς, τα παιδιά ερμηνεύουν και οργανώνουν τις εμπειρίες τους στο πλαίσιο του φυσικού και κοινωνικο-πολιτισμικού τους περιβάλλοντος σε λίγα, σχετικά συνεκτικά, **επεξηγηματικά πλαίσια**, τις λεγόμενες «θεωρίες πλαισίου».
  - Σύνθετες νοητικές δομές
- Οι αρχικές «θεωρίες πλαισίου» για τον αριθμό βασίζεται σε γνώσεις και εμπειρίες για τους φυσικούς αριθμούς
  - Στα 4-5 χρόνια υφίστανται ήδη αρχικές «θεωρίες πλαισίου» για τον αριθμό

# Εννοιολογική αλλαγή (II)

Η προσέγγιση της «θεωρίας πλαισίου»

- Τι γίνεται όταν τα παιδιά έρχονται σε επαφή με μη φυσικούς αριθμούς;
  - Ομοιότητες (ουσιώδεις και επιφανειακές)
  - Διαφορές
    - Για κάθε μία διαφορά, ένα συστηματικό λάθος
- Οι αρχικές «θεωρίες πλαισίου» και οι βασικές αρχές τους δεν αναθεωρούνται δια μιας
- **Συνθετικές αντιλήψεις/Συνθετικά μοντέλα**
  - Αφομοίωση νέας πληροφορίας, χωρίς να αίρονται οι αρχές και οι παραδοχές της αρχικής θεωρίας πλαισίου

---

# Μια μικρή ιστορία

*"I have been about the world—hopping here and there," said the frog, "and I have seen extraordinary things."*

*"Like what?" asked the fish.*

*"Birds," said the frog mysteriously. "Birds!" And he told the fish about the birds, who had wings, and two legs, and many, many colors.*

# «Πουλιά»



Συνθετικό μοντέλο

# Συνθετικό μοντέλο

*Ανάμεσα στο 0,001 και το 0,01 υπάρχουν εννιά αριθμοί. Ή δέκα – δεν είμαι σίγουρος γι' αυτό. Αλλά αν τους κάνεις κλάσματα, τότε μπορείς να βρεις περισσότερους αριθμούς ανάμεσα, άπειρους αριθμούς.*

# Ερωτήματα

- Είναι «μεμονωμένο» περιστατικό;
- Είναι προϊόν του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος;
- Σειρά 3 ερευνών
  - 301 παιδιά Α΄ και Γ΄ Γυμνασίου
  - 549 παιδιά Α΄ Γυμνασίου, Γ΄ Γυμνασίου, Β΄ Λυκείου
  - 85 παιδιά Γ΄ Γυμνασίου από την Ελλάδα και 128 παιδιά της αντίστοιχης τάξης από τη Φλάνδρα (Βέλγιο)
  - Ερωτήματα ανοιχτού και κλειστού τύπου

# Τι μάθαμε

- Σε κάθε ηλικιακή ομάδα και ανεξαρτήτως χώρας, υπάρχει μια ομάδα παιδιών που συστηματικά απαντά «πεπερασμένο πλήθος ενδιάμεσων»
- Η «απειρία των ενδιάμεσων» εμφανίζεται πρώτα στους φυσικούς, μετά στους δεκαδικούς\*, τελευταία στα κλάσματα\*
- Υπάρχουν υπο-ομάδες παιδιών που απαντούν συστηματικά διαφορετικά
  - Για τους φυσικούς, σε σχέση με δεκαδικούς και κλάσματα
  - Για τα κλάσματα, σε σχέση με τους δεκαδικούς
- Οι «άπειροι ενδιάμεσοι» συχνά είναι συγκεκριμένης μορφής (δεκαδική, κλασματική)

# Πώς το ερμηνεύσαμε

- «Συνθετικές αντιλήψεις» για τη διάταξη των ρητών αριθμών
- «Συνθετικό μοντέλο» των (θετικών) ρητών ως μια συλλογή ξένων μεταξύ τους συνόλων
  - Φυσικοί, δεκαδικοί, κλάσματα
- Όπως προβλέπει η προσέγγιση της «θεωρίας πλαισίου» στην εννοιολογική αλλαγή.

---

**Προϋπάρχουσα γνώση**

...και άλλα φαινόμενα

---

---

# Βεβαιότητα

Η ψευδαίσθηση της κατανόησης

*Ανάμεσα στο 2,3 και το 2,4 δεν υπάρχει  
άλλος αριθμός – και γι' αυτό είμαι σίγουρη!*

Ελένη, Γ' Γυμνασίου

---

# Αμεσότητα

(Ανάμεσα στο 0,005 and 0,006) *δεν υπάρχει άλλος αριθμός. Όχι, μισό λεπτό!* Υπάρχουν πάρα πολλοί αριθμοί: Είναι το 0,0051, το 0,0052 και τα λοιπά. Αλλά μπορεί να είναι και το 0,00511 ή το 0,005831 και ακόμα περισσότεροι.

Μάνος, Γ΄ Γυμνασίου

# «Ανθεκτικότητα» I

- Ο Γιάννης (Α΄ Λυκείου) ερωτάται αν η ανισοτική σχέση  $5\delta > 4/\delta$  ισχύει πάντα. Δοκιμάζει με 3 φυσικούς αριθμούς.
- 3 νύξεις:
  - Ισχύει για όλους τους αριθμούς που ξέρεις;
  - Θα ήθελες να δοκιμάσεις με κάποιο άλλο είδος αριθμού;
  - Θα ήταν δυνατόν να βρεις έναν αριθμό, για τον οποίο η ανισότητα δεν ισχύει;
- Τελικά, ερωτάται ευθέως αν θα μπορούσε να δοκιμάσει έναν αρνητικό αριθμό, ή ένα κλάσμα  $< 1$ .

*Ναι, μπορώ... Θα έπρεπε να έχω σκεφτεί τους αρνητικούς και τα κλάσματα, αλλά δεν μου πέρασε από το μυαλό.*

## «Ανθεκτικότητα» II

- 215 πρωτοετείς φοιτητές σε μαθηματικό τμήμα ερωτώνται: Υπάρχει ρητός αριθμός  $q$ , μεγαλύτερος από το  $3/5$ , τέτοιος ώστε να ισχύει ότι «δεν υπάρχει αριθμός ανάμεσα στο  $q$  και στο  $3/5$ »; Αν υπάρχει τέτοιος αριθμός, γράψτε τον, αν όχι, γράψτε «δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός».
- 76 (35.3%) έγραψαν τον «επόμενο» του  $3/5$ .

# Οι *δαισθήσεις* του E. Fischbein I

- Τα χαρακτηριστικά αυτά απέδωσε ο Fischbein στις *δαισθήσεις*
  - Εμφανίζονται άμεσα
  - Θεωρούνται αυτονόητες
  - Συνοδεύονται από ισχυρό αίσθημα βεβαιότητας
  - Είναι ανθεκτικές (π.χ. στη διδασκαλία)
  - Είναι άδηλες
  - Είναι παραγωγικές
    - δηλ. επιτρέπουν «άλματα» από το οικείο στο μη οικείο
- Έχουν σημαντική επιρροή στην ανθρώπινη συμπεριφορά

# Η θεωρία του Fishbein...

- ... έχει συνδυαστεί ερευνητικά με μια οικογένεια θεωριών για το συλλογισμό από το χώρο της Γνωστικής Ψυχολογίας
  - με βασική υπόθεση αυτή της διπλής επεξεργασίας (dual process)

# Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση...

- ...υπάρχουν δύο (γνωστικά) συστήματα επεξεργασίας που σχετίζονται με τη συλλογισμό και τη λήψη αποφάσεων:
  - Το «διαισθητικό», το οποίο είναι γρήγορο, συνειρμικό και δεν επιβαρύνει τη μνήμη
  - Το «αναλυτικό», το οποίο απαιτεί την πρόθεση και το έλεγχο του υποκειμένου, είναι αργό, και επιβαρύνει τη μνήμη

## Υπό αυτό το πρίσμα

Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο 0,005 και το 0,006;

- Δεν υπάρχει άλλος αριθμός
  - Λειτουργεί το «διαισθητικό» σύστημα
  - Αν δεν επέμβει το «αναλυτικό», ο Μάνος μένει στην πρώτη του, άμεση απάντηση
- *Όχι, μισό λεπτό!*
  - Επεμβαίνει το «αναλυτικό» σύστημα
  - Ο Μάνος αναθεωρεί την απάντησή του
- Υπάρχουν πάρα πολλοί αριθμοί: Είναι το 0,0051, το 0,0052 και τα λοιπά. Αλλά μπορεί να είναι και το 0,00511 ή το 0,005831 και ακόμα περισσότεροι.

Μάνος, Γ΄ Γυμνασίου

# Ερώτημα

- Έχει η προϋπάρχουσα γνώση για τους φυσικούς διαισθητικό χαρακτήρα;
- Μελέτες αρχικά με μορφωμένους ενήλικες
  - Σύγκριση, πράξεις, πυκνή διάταξη
  - **Μέτρηση χρόνου αντίδρασης**
  - Συμβατά και ασύμβατα ερωτήματα
    - **Συμβατό**: Μεταφορά από τους φυσικούς οδηγεί σε σωστή απάντηση
      - π.χ. Σύγκρινε: **0,3** και **0,65**
    - **Ασύμβατο**: Μεταφορά από τους φυσικούς οδηγεί σε λανθασμένη απάντηση
      - Π.χ. Σύγκρινε **0,4** και **0,35**

# Τι βρήκαμε

- Περισσότερα λάθη στα ασύμβατα, παρά στα συμβατά ερωτήματα
- Όταν τα **ασύμβατα** απαντώνται **σωστά**, απαιτείται **περισσότερος χρόνος**
- Ερμηνεία
  - Η πρώτη απάντηση που έρχεται στο μυαλό είναι η «διαισθητική»
  - Χρειάζεται να «κατασταλεί» για να προκύψει η σωστή
- Συμπέρασμα
  - Επιρροές της προϋπάρχουσας γνώσης για τους φυσικούς, ακόμα και όταν δίνεται η **σωστή** απάντηση

# Συνολικά

- Οι επιδράσεις της προϋπάρχουσας γνώσης για τους φυσικούς έχουν τα χαρακτηριστικά (γνωστικής) προκατάληψης
- Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού

---

**Έχει σημασία;**

Για τη μαθηματική εκπαίδευση

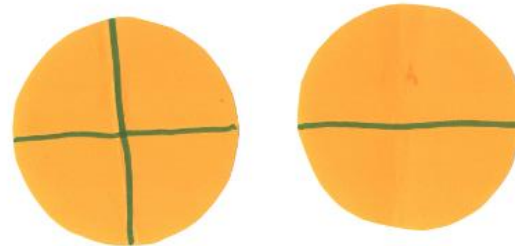
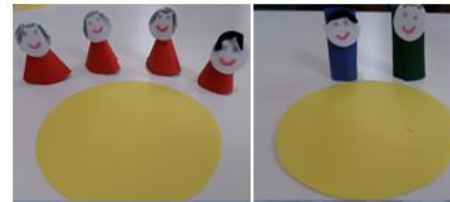
---

# Ναι μεν, αλλά...

- Χρήσιμο είναι να γνωρίζουμε για τις επιδράσεις της προκατάληψης του φυσικού αριθμού
- Δεν ωφελεί να προσπαθούμε να αντιμετωπίσουμε τις παρανοήσεις μία-μία
- Η κατανόηση για τον αριθμό βασίζεται σε ένα σύνθετο πλέγμα εννοιών, σχέσεων, διαδικασιών και καταστάσεων εφαρμογής τους

# Λένα & Μιχάλης, νήπια

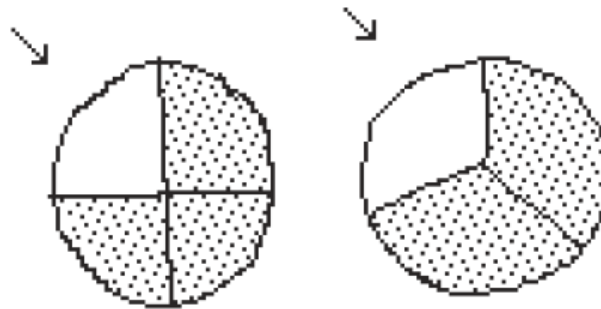
- Εδώ είναι μια παρέα κοριτσιών και μια παρέα αγοριών. Θα μοιραστούν την τούρτα τους δίκαια.
- Μπορείς να βοηθήσεις τα κορίτσια να μοιραστούν την τούρτα τους; Μπορείς να βοηθήσεις τα αγόρια;
- Ποιοι θα φάνε μεγαλύτερο κομμάτι τούρτας, τα κορίτσια ή τα αγόρια;



- Τα κορίτσια γιατί:
  - Τα κορίτσια είναι περισσότερα
  - Τα κομμάτια είναι περισσότερα

# Μαθητές Δημοτικού

- Το  $\frac{2}{3}$  και το  $\frac{3}{4}$  είναι ίσα, γιατί και στα δύο λείπει *ένα κομμάτι*  
Wyatt, 4<sup>η</sup> τάξη



## Παιδιά Δημοτικού, Γυμνασίου, ....

- Η Sue και η Jenny θέλουν να χρωματίσουν με ακριβώς το ίδιο χρώμα.
- Η Sue βάζει 3 κουτιά κίτρινη μπογιά και 6 κουτιά κόκκινη μπογιά.
- Η Jenny βάζει 7 κουτιά κίτρινη μπογιά.
- Πόσα κουτιά κόκκινης μπογιάς χρειάζεται η Jenny;

(Η Jenny θα χρειαστεί 10 κουτιά)  
Γιατί αν η Jenny βάζει 4 παραπάνω  
κουτιά κίτρινη μπογιά από τη Sue,  
τότε...*Πρόσθεσα το 4 στο 6 και*  
πήρα 10.

Helen,  
από ένα δείγμα  
παιδιών  
6<sup>th</sup>-9<sup>th</sup> τάξης

## Παιδιά Δημοτικού, Γυμνασίου, ....

$$6/13 > 4/5$$

- *Γιατί το 6 είναι μεγαλύτερο από το 4 και το 13 είναι μεγαλύτερο από το 5.*

# Μια ισχυρή τάση: Τα παιδιά εστιάζουν...

- ...σε **διακριτές** ποσότητες
- ...στο **πλήθος** και τους **αριθμούς** που το εκφράζουν
- ...στις **προσθετικές σχέσεις**
  - Σύγκριση μέσω της διαφοράς
  - «λείπει ένα κομμάτι»

# Γιατί;

Άτυπες και τυπικές πρώτες εμπειρίες

- Το κοινωνικο-πολιτισμικό περιβάλλον ευνοεί και ενισχύει από νωρίς τις εμπειρίες που αφορούν το πλήθος και τους φυσικούς αριθμούς
  - Γλωσσικά εργαλεία, χρήση δακτύλων, παιχνίδια,...
- Στα πρώτα χρόνια της εκπαίδευσης
  - «Αριθμοί και πράξεις» στις διακριτές ποσότητες
    - Και ο πολλαπλασιασμός/διαίρεση
  - Έμφαση στις προσθετικές σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων και αριθμών
  - Όχι γλωσσικά ή άλλα αναπαραστατικά εργαλεία για την έκφραση πολλαπλασιαστικών σχέσεων
- Μια μεγάλη **ασυμμετρία**

# Επιπλέον

- Ο πολλαπλασιασμός ως «επαναλαμβανόμενη πρόσθεση»
- Η διαίρεση ως «δίκαιη μοιρασιά» (μερισμός)
- Τα κλάσματα ως «μέρος-όλου» με «διακριτοποιημένα» μοντέλα εμβαδού
- .....

## Ένα ερευνητικό πρόγραμμα

Σχεδιάζουμε μια τροχιά μάθησης/διδασκαλίας για να αμβλύνουμε την ασυμμετρία

---

Στο φόντο: Η προϋπάρχουσα γνώση...

....επηρεάζει καθοριστικά την περαιτέρω μάθηση

---

# Στο προσκήνιο

- Ερευνητικά δεδομένα δείχνουν ότι
  - Οι **πρώιμες μαθηματικές ικανότητες** των παιδιών είναι πιο πλούσιες

και

- Οι **μαθηματικές εμπειρίες στις μικρές ηλικίες** είναι πολύ πιο σημαντικές για την περαιτέρω μαθηματική ανάπτυξη
- απ' όσο πιστεύαμε μέχρι (σχετικά) πρόσφατα

# Βασικές αρχές σχεδιασμού

- **Μακροπρόθεσμος** σχεδιασμός της διδασκαλίας
  - Έναρξη όσο πιο **νωρίς** γίνεται
- Θεμελίωση της έννοιας του **κλάσματος** σε κατάλληλες βάσεις
  - Σε έννοιες, σχέσεις, διαδικασίες
    - του **πολλαπλασιαστικού** πεδίου
    - **μεταφέρσιμες** από τους φυσικούς στους ρητούς
- Συστηματική αξιοποίηση κεντρικών ιδεών διαχρονικά (σε όλη την πρωτοβάθμια εκπαίδευση)

# Κεντρικές ιδέες

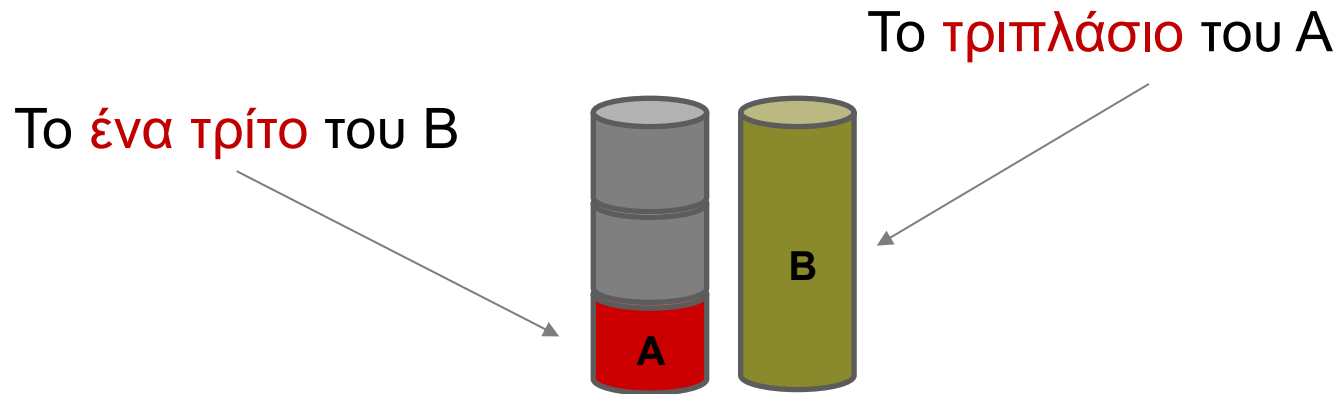
- Μετατοπίζουμε το ενδιαφέρον μας από τους αριθμούς και τις πράξεις στις σχέσεις
  - Πολλαπλασιαστικές σχέσεις, ειδικότερα
- Αξιοποιούμε το πλαίσιο της μέτρησης μήκους διαχρονικά (σε όλη την πρωτοβάθμια εκπαίδευση)
  - Κρίσιμη για την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού γενικά (και ιστορικά)
  - Μοντέλο για τη διαίρεση (μέτρησης) που μεταφέρεται από τους φυσικούς, στους ρητούς

# Τι σημαίνει;

$$3 \times 1$$

- Τρεις φορές το 1,  $1+1+1$
- Το τριπλάσιο του 1
- Έχει διαφορά; Έχει σημασία;

# Τι σχέση έχουν;

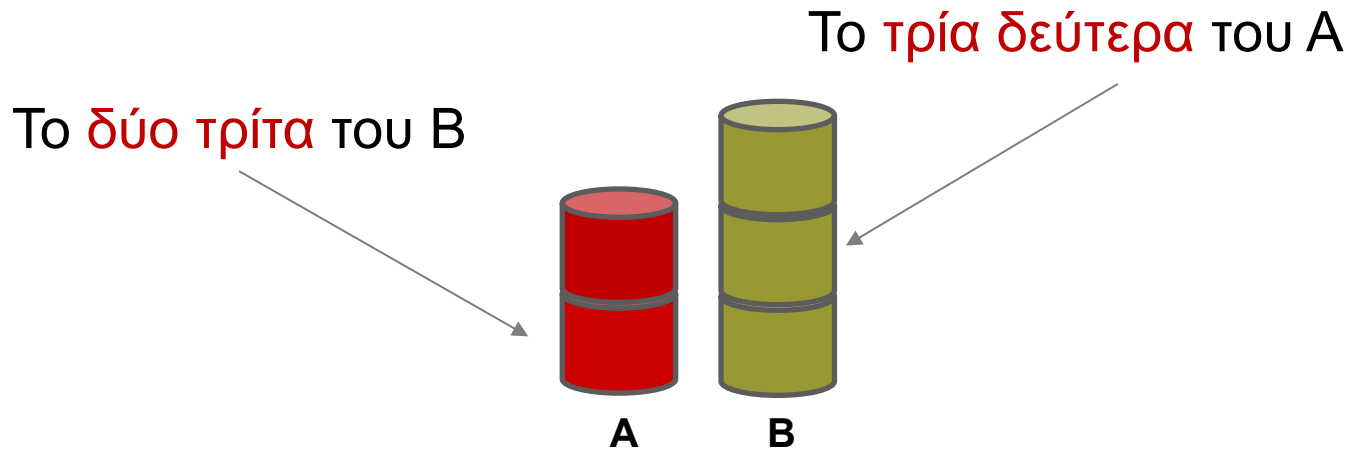


- Η **ίδια σχέση**, από δύο «οπτικές γωνίες»
  - Πολλαπλασιαστική σύγκριση μέσω **μέτρησης**

# Έχει σημασία;

- Τι σημαίνει  $0,1 \times 1$  ή  $0,1 \times 1/3$ , αν το  $3 \times 1$ 
  - σημαίνει (μόνο) «3 φορές το 1»;
  - σημαίνει «το τριπλάσιο του 1»;
- Πώς θα πείσουμε τα παιδιά ότι η πράξη που κάνω για να βρω το « $1/3$  του 1» είναι ο **πολλαπλασιασμός**
  - αν το  $3 \times 1$  σημαίνει (μόνο) « $1+1+1$ »;
  - Αν σημαίνει «το τριπλάσιο του 1»;

# Τι σχέση έχουν;



- Η **ίδια σχέση**, από δύο «οπτικές γωνίες»
  - Καταχρηστικά κλάσματα, αντίστροφοι αριθμοί, ...

# Αρχή της αντιστάθμισης στη μέτρηση

$M = A \cdot \mu$ , για σταθερό  $M$ , μεταβαλλόμενο  $\mu$

- Όσο **μεγαλώνει** (αντ. μικραίνει) η μονάδα μέτρησης, τόσο μικραίνει (αντ. μεγαλώνει) το αριθμητικό αποτέλεσμα της μέτρησης.
- Όταν η μονάδα μέτρησης **πολλαπλασιάζεται με το  $\alpha \neq 0$** , τότε το αριθμητικό αποτέλεσμα **διαιρείται με το  $\alpha$** 
  - Πριν την εισαγωγή των αντίστροφων αριθμών,  $\Gamma' / \Delta'$  Δημοτικού
- Όταν η μονάδα μέτρησης **πολλαπλασιάζεται με το  $\alpha \neq 0$** , τότε το αριθμητικό αποτέλεσμα **πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφο του  $\alpha$** 
  - Μετά την εισαγωγή των αντίστροφων αριθμών,  $E'$  Δημοτικού/  $\Sigma\tau'$  Δημοτικού
- Το γινόμενο του  $A$  με το  $\mu$  παραμένει σταθερό
  - Ορισμός των «αντιστρόφως ανάλογων ποσών» στην  $\Sigma\tau'$  Δημοτικού

# Το «ανάλογον» του αλγορίθμου της διαίρεσης με κλασματικό διαιρέτη

- Όσο μεγαλώνει (αντ. μικραίνει) η μονάδα μέτρησης, τόσο μικραίνει (αντ. μεγαλώνει) το αριθμητικό αποτέλεσμα της μέτρησης.
- Όταν η μονάδα μέτρησης πολλαπλασιάζεται με το  $\alpha \neq 0$ , τότε το αριθμητικό αποτέλεσμα διαιρείται με το  $\alpha$ 
  - Πριν την εισαγωγή των αντίστροφων αριθμών, Γ' / Δ' Δημοτικού
- Όταν η μονάδα μέτρησης **πολλαπλασιάζεται με το  $\alpha \neq 0$** , τότε το αριθμητικό αποτέλεσμα **πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφο του  $\alpha$** 
  - Μετά την εισαγωγή των αντίστροφων αριθμών, Ε' Δημοτικού/ ΣΤ' Δημοτικού
- Το γινόμενο του Α με το μ παραμένει σταθερό
  - Ορισμός των «αντιστρόφως ανάλογων ποσών» στην ΣΤ' Δημοτικού

# Σχεδιάσαμε διδακτινά πλαίσια ώστε:

- Παιδιά νηπιαγωγείου
  - Να κατασκευάζουν πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσια συνεχών και διακριτών ποσοτήτων και να εκφράζουν συμμετρικά τις σχέσεις
- Παιδιά Ε΄ και Στ΄ Δημοτικού
  - Να αποδίδουν νόημα στη διαίρεση κλασμάτων ως μέτρηση
  - Να αποδίδουν νόημα στον αλγόριθμό της με βάση την «αρχή της αντιστάθμισης»
- Μελλοντικοί εκπαιδευτικοί να κατανοήσουν σε μεγαλύτερο βάθος έννοιες, σχέσεις και διαδικασίες του πολλαπλασιαστικού πεδίου

# Όταν ολοκληρώσουμε την τροχιά...

- ... θα πετύχουμε την άμβλυνση της «προκατάληψης του φυσικού αριθμού»;
- Θα το διερευνήσουμε
  - Αυτό που ξέρουμε προς το παρόν είναι ότι υπάρχουν πολλά ενδιάμεσα οφέλη για τα παιδιά

# Επεισόδιο 1: Μετρώντας με σύνθετη μονάδα

Υπολογισμός του ενός δευτέρου του οκτώ

## ■ Άρια: Θα μοιράσω με τετράδες

- *Νοερά*

Κοίτα, είναι **μία, δύο τετράδες**

- *Βάζει τις ομάδες στα πιατάκια*

## □ Καίτη: Δεν είναι τετράδες! Είναι δυάδες!

Να, είναι **ένα, δύο, τρία, τέσσερα ζευγάρια**

- *Χρησιμοποιεί το ίδιο ζευγάρι δαχτύλων για να δείξει την κάθε δυάδα*

## □ Ερευνήτρια: Οπότε, τι έχω κορίτσια; Δύο τετράδες ή τέσσερις δυάδες;

## □ Άγγελος: Το ίδιο είναι. Έχει τέσσερις σ' αυτό (το πιατάκι) και τέσσερις σ' αυτό. Η μια λέει «τετράδες», η άλλη «δυάδες». Όπως θέλουμε το λέμε.

## Επεισόδιο 2: Λειτουργιώντας αρχές της διαίρεσης

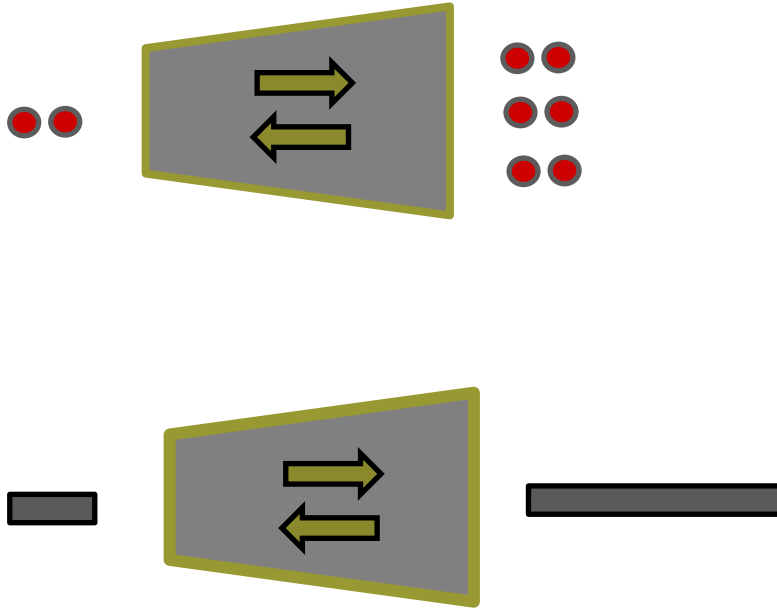
Υπολογισμός του  $\frac{1}{3}$  της μπάρας

- **Γιάννα:** Να την κόψουμε σε τρία ίσα κομμάτια.

Ο Κώστας και η Λόρα διαλέγουν **τρία ίσα κομμάτια, πιο κοντά** από το κατάλληλο. Τα τοποθετούν πάνω στην αρχική μπάρα.

- **Ερευνήτρια:** Ωραία, βρήκατε τρία ίσα κομμάτια που χωράνε στη μεγάλη μπάρα. Μπορώ τώρα να δώσω αυτό το κομμάτι;
- **Νίκος:** Όχι, γιατί δεν έφαγαν όλη την μπάρα με τα κομμάτια
- **Ερευνήτρια:** Τι εννοείς;
- **Νίκος:** Όταν λέμε «μοιράζω», εννοούμε όλο. Να βρούμε άλλα κομμάτια.

# Κλασματομηχανές



- Ένα έως τρία παραδείγματα
  - Μπορείς να μαντέψεις τι κάνει η μηχανή;
  - Τι σχέση έχει αυτό που έβαλα με αυτό που βγήκε;
- Βάλε ό,τι θέλεις, βρες τι θα βγει.
- Φτιάξε τη δική σου μηχανή, εξήγησε τι κάνει

## Αναγνωρίζοντας καινούργιες αριθμητικές πράξεις

- **Άγγελος:** Κυρία, δεν μπορούμε να γράψουμε πάνω στις μηχανές τι κάνουν;
- **Ερευνήτρια:** Τι θα ήθελες να γράψεις πάνω στη μηχανή;
- **Άγγελος:** Να γράψουμε τους αριθμούς που φτιάχνει και να βάλουμε ένα σύμβολο.
- **Ερευνήτρια:** Τι σύμβολο θα έβαζες;
- **Άγγελος:** Να, η πρόσθεση έχει τον σταυρό, η αφαίρεση έχει την παύλα. Κι εδώ μπορούμε να βάλουμε κάτι που να δείχνει τι κάνει η μηχανή. Ότι βάζεις μέσα, από τη μια μερά στο κάνει τρεις φορές, κι από την άλλη το σπάει σε τρία κομμάτια.
- **Ερευνήτρια:** Οπότε; Τι να βάλουμε ανάμεσα στους αριθμούς; Να βάλω έναν σταυρό; Μια παύλα;
- **Άγγελος:** Αυτό δεν είναι πρόσθεση. Ούτε αφαίρεση.

---

Ευχαριστώ για την προσοχή σας

---